MESIN TURING

(Recursively Enumerable Language)

Judhi S[1]

[1]Kelompok Keahlian Informatika

2019

STEI

Bahasan

1. Model Mesin Turing
2. Kelas Bahasa
3. MT sebagai Model Komputer
4. MT sebagai Enumerator
5. Modifikasi Mesing Turing

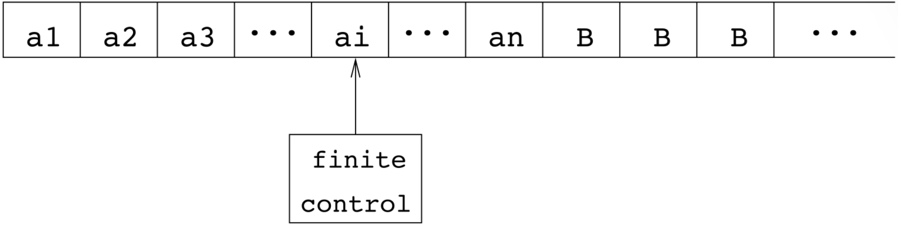
Model Mesin Turing

Mesin Turing adalah model matematika sederhana dari suatu komputer dan digunakan untuk memodelkan sistem komputasi dari suatu komputer secara umum. Mesin Turing digunakan untuk mempelajari klas bahasa-bahasa yang dibangkitkan dan klas fungsi integer yang di-enumerasinya.

Mesin Turing digunakan untuk mengenali klas dari suatu bahasa: *recursively enumerable language* dan klas dari fungsi integer: *partial recursive function*.

Model Machine Turing diperkenalkan oleh Alan Turing 1936. Model yang sederhana dari Machine Turing digambarkan pada Gambar 1.

Skema Mesin Turing



Gb. 1: Pita Mesin Turing

Perpindahan head

Ketika head dari MT berpindah maka dapat terjadi :

- perubahan state
- mencetak simbol yang di-scan, dan mengganti simbol yang discan
- head bergerak kekiri atau kekanan.

Notasi Formal

Secara formal MT dinotasikan dengan :

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, B, F)$$

dimana:

Q : himpunan dari state-state

Γ : himpunan simbol tape yang diijinkan

B : simbol kosong (*blank*)

Σ : adalah subset dari Γ, tidak termasuk B.

δ : fungsi perpindahan, yaitu mapping dari $Q \times \Gamma$ ke $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

q_o : adalah start simbol, $\in Q$

$F \subseteq Q$: adalah himpunan final state

Perpindahan State

Instantaneous Description (ID)
ID dari MT dinotasikan dengan $\alpha_1 q \alpha_2$, dimana q adalah current state ; α_1, α_2 adalah string di Γ^*, simbol sebelah kiri dan kanan q sampai simbol non-blank.

Misalkan $X_1X_2...X_{i-1}qX_i...X_n$ adalah sebuah ID; dan $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, dimana jika $i - 1 = n$, maka X_i diambil blank. Jika $i = 1$, maka tidak ada ID berikutnya, karena head tidak dibolehkan keluar dari ujung pita kiri. Jika $i > 1$, dituliskan:

$$X_1X_2...X_{i-1}qX_i...X_n \vdash_M X_1X_2...X_{i-2}pX_{i-1}YX_{i+1}...X_n$$

Bila sufix $X_{i-1}YX_{i+1}...X_n$ adalah blank maka bisa dihapus. Misalkan $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$, maka dituliskan:

$$X_1X_2...X_{i-1}qX_i...X_n \vdash_M X_1X_2...X_{i-1}YpX_{i+1}...X_n$$

Bahasa L(M)

Bahasa yang diterima oleh M dinotasikan L(M), adalah kumpulan string-string di Σ^* yang mengakibatkan M masuk ke final state, bila di-scan dari kiri kekanan (string ditempatkan justified kiri) mulai state q_0, head berada di ujung kiri pita.

Secara formal, suatu bahasa diterima $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ adalah:

$$\{w | w \in \Sigma^* \text{ dan } q_0 w \vdash^* \alpha_1 p \alpha_2, \text{untuk } p \in F \text{ dan } , \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*$$

Jika sebuah input diterima M maka Mesin Turing akan berhenti, walau untuk string yang ditolak ada kemungkinan MT tidak akan berhenti (*looping*).

Contoh:

Misalkan $L(M) = \{0^n1^n | n \geq 1\}$. Pertama, pita dari M berisi 0^n1^n dan diikuti dengan tak hingga blank. secara berulang, M mengganti 0 dengan X kemudian bergerak kekanan mengganti 1 dengan Y. Kemudian bergerak kekiri sampai ketemu X paling kanan, bergerak 1 sel kekanan mengganti 0 dengan X, bergerak kekanan sampai 1 paling kiri dan mengganti dengan Y dan seterusnya.

Jika pencarian 1 kekanan menemukan blank (bukan 1), maka M berhenti dengan penolakan. Jika setelah mengganti 1 dengan Y, M tidak menemukan 0 lagi, maka M men-cek sekali lagi 1 bila habis maka string diterima.

Suatu state dalam program merepresentasikan pernyataan atau kumpulan dari beberapa pernyataan. Fungsi perpindahan δ didefinisikan pada tabel 1. Contoh komputasi string 0011 ditunjukkan pada tabel 2.

Contoh:

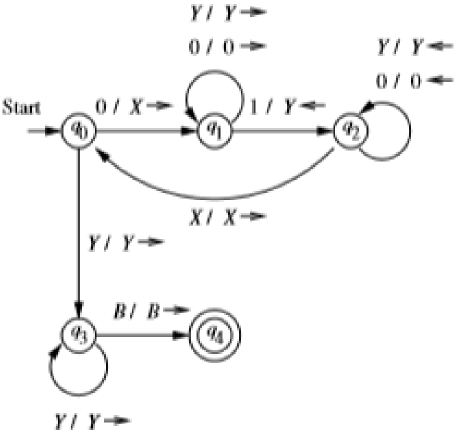
	Simbol				
state	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)			(q_3, Y, R)	
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)		(q_1, Y, R)	
q_2	$(q_2, 0, L)$		(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	
q_3				(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4					

Tab. 1: Fungsi perpindahan

$q_0 0011$	$\vdash$	$X q_1 011$	$\vdash$	$X 0 q_1 11$	$\vdash$	$X q_2 0 Y 1$	$\vdash$
$q_2 X 0 Y 1$	$\vdash$	$X q_0 0 Y 1$	$\vdash$	$X X q_1 Y 1$	$\vdash$	$X X Y q_1 1$	$\vdash$
$X X q_2 Y Y$	$\vdash$	$X q_2 X Y Y$	$\vdash$	$X X q_0 Y Y$	$\vdash$	$X X Y q_3 Y$	$\vdash$
$X X Y Y q_3$	$\vdash$	$X X Y Y B q_4$					

Tab. 2: Komputasi 0011

Diagram



Gb. 2: Diagram transisi

Kelas Bahasa

Bahasa yang diterima oleh MT disebut dengan *recursively enumerable* (r.e.). Istilah "enumerable" mempunyai arti string-string nya dapat di-enumerasi oleh MT. Pengertian *recusif* sama dengan *recursion* dalam pemrograman.

Kelas dari bahasa r.e. sangat luas dan diantaranya terdapat kelas CFL (bahasa bebas konteks). Klas bahasa r.e. tidak dapat secara teknis ditentukan keanggotaannya, untuk mengetahui maka suatu string adalah anggota dari L(M) maka string tersebut bila dikenali oleh M maka M akan berhenti dan sebaliknya.

Salah satu contoh dari kelas r.e. adalah himpunan *rekursif*, dimana semua string yang menjadi anggotanya akan dikenali oleh sekurang-kurangnya satu Mesin Turing (berhenti bila di scan). Kelas rekursif merupakan *proper* subkelas dari kelas r.e.

MT sebagai Model Komputer

Mesin Turing selain digunakan sebagai pengenal bahasa, juga digunakan sebagai penghitung fungsi bilangan bulat. Bilangan bulat $i \geq 0$ direpresentasikan dengan 0^i.

Misalkan fungsi f mempunyai k argumen $i_1, i_2, ..., i_k$, maka bilangan bulat ini ini dituliskan dalam pita Mesin Turing yang dibatasi oleh '1', dituliskan : $0^{i_1}10^{i_2}, ..., 10^{i_k}$

Jika Mesin Turing berhenti dengan pita yang berisi 0^m untuk m tertentu maka didefinisikan $f(i_1, i_2, ..., i_k) = m$

Contoh:

Pengurangan murni $m - n$ didefinisikan sebagai $m - n$ untuk $m \geq n$ dan sama dengan nol untuk $m < n$. Mesin Turing :

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, ..., q_6\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B.\varnothing)$$

mulai membaca string 0^m10^n pada pita mesing Turing, maka mesin akan berhenti bila di pita tercetak simbol 0^{m-n}.

M secara berulang menggantikan simbol 0 yang pertama dengan B, kemudian dilakukan pencarian 1 kekanan yang diikuti dengan 0, mengganti 0 dengan 1. Kemudian mesing Turing bergerak kekiri sampai ketemu B, dan seterusnya.

Pengulangan berhenti jika :

- Awal pencarian, M tidak menemukan 0.
- Pencarian kekanan simbol 0, dan M menemukan B.

Fungsi transisi

1. $\delta(q_0, 0) = (q_1, B, R)$
   Mulai pencarian, menggantikan simbol 0 pertama dengan B.
2. $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, R)$
   $\delta(q_1, 1) = (q_2, 1, R)$
   Pencarian kekanan mencari 1 yang pertama.
3. $\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, R)$
   $\delta(q_2, 0) = (q_3, 1, L)$
   Melakukan pencarian kekanan melewati 1 hingga ketemu 0 (mengganti dengan 1)
4. $\delta(q_3, 0) = (q_3, 0, L)$
   $\delta(q_3, 1) = (q_3, 1, L)$
   $\delta(q_3, B) = (q_0, B, R)$
   Bergerak kekiri ke simbol B, masuk ke status q_0
5. $\delta(q_2, B) = (q_4, B, L)$
   $\delta(q_4, 1) = (q_4, B, L)$
   $\delta(q_4, 0) = (q_4, 0, R)$
   $\delta(q_4, B) = (q_6, 0, R)$
   Jika dalam status q_2 didapatkan B sebelum 0, kasusnya seperti no 1. Masuk ke status q_4 dan bergerak kekiri mengganti simbol 1 dengan B sampai menemukan B. Simbol B ditukar kembali dengan 0, M masuk ke status q_6 dan berhenti.
6. $\delta(q_0, 1) = (q_5, B, R)$
   $\delta(q_5, 0) = (q_6, B, R)$
   $\delta(q_5, 1) = (q_6, B, R)$
   $\delta(q_5, B) = (q_6, B, R)$
   Jika dalam status q_0 ditemukan 1 (bukan 0), kasusnya seperti no 2. M masuk ke

Ilustrasi

Contoh 1:

M diberikan masukan 0010, perhitungan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{rcrcrcrc}
q_0 0010 & \vdash & Bq_1 010 & \vdash & B0q_1 10 & \vdash & B01q_2 0 & \vdash \\
B0q_3 11 & \vdash & Bq_3 011 & \vdash & q_3 B011 & \vdash & Bq_0 011 & \vdash \\
BBq_1 11 & \vdash & BB1q_2 1 & \vdash & BB11q_2 & \vdash & BB1q_4 1 & \vdash \\
BBq_4 1 & \vdash & Bq_4 & \vdash & B0q_6 & & &
\end{array}
$$

Contoh 2:

M diberikan masukan 0100, perhitungan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{rcrcrcrc}
q_0 0100 & \vdash & Bq_1 00 & \vdash & B1q_2 00 & \vdash & Bq_3 110 & \vdash \\
q_3 B110 & \vdash & Bq_0 110 & \vdash & BBq_5 10 & \vdash & BBBq_5 0 & \vdash \\
BBBBq_5 & \vdash & BBBBBq_6 & & & & &
\end{array}
$$

MT sebagai enumerator

Mesin Turing dapat menuliskan output pada pita, yang dibatasi simbol #. Output tersebut dapat membentuk suatu bahasa yang dinotasikan dengan $G(M)$, yaitu himpunan dari $w \in \Sigma^*$ yang merupakan string antara #.

Lemma:
Jika L adalah $G(M_1)$ untuk beberapa MT M_1, maka L adalah himpunan r.e.

Bukti:
Konstruksi MT M_2 dengan jumlah pita satu lebih banyak daripada M_1. M_2 mensimulasikan M_1 menggunakan semua pita kecuali pita masukan. Bilamana M_1 mencetak # pada pita keluaran maka M_2 membandingkan masukannya dengan string yang dibangkitkan, jika sama maka M_2 menerima, jika tidak M_2 mensimulasikan lagi M_1 dan seterusnya. Sehingga M_2 menerima masukan x jika dan hanya jika $x \in G(M_1)$. Jadi $L(M_2) = G(M_1)$

Lanjutan

Teorema:
Suatu bahasa adalah r.e. jika dan hanya jika termasuk dalam $G(M_2)$ untuk beberapa MT M_2

Bukti:
Dengan lemma sebelumnya hanya ditunjukkan $L = L(M_1)$ dapat dibangkitkan oleh MT M_2. M_2 mensimulasikan pembangkit pasangan $(i; j)M_2$ menghasilkan string ke i, w_i dalam urutan kanonik dan mensimulasikan M_1 untuk w_i dengan j langkah. Jika M_1 menerima dengan j langkah maka M_2 membangkitkan w_i

Definisi:
Jika $\Sigma = \{0, 1\}$, **canonical order** adalah $\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10...$ dan seterusnya

Modifikasi Mesin Turing

MT dua-arah dengan pita tak terbatas

MT dua-arah dengan pita tak terbatas dinotasikan dengan $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ seperti model yang satu pita. MT ini mempunyai Pita tak terbatas ke arah kiri maupun ke kanan. Simbol B terletak di kiri maupun dikanan pita. Perpindahan $\vdash_M$ yang menghubungkan dua ID diperoleh dengan cara yang sama denga MT satu arah, dengan perbedaan sbb:

Jika $\delta(q, X) = (p, Y, L)$ maka $qX\alpha \vdash_M pBY\alpha$ (model satu arah tidak boleh)

Jika $\delta(q, X) = (p, B, R)$ maka $qX\alpha \vdash_M p\alpha$ (model satu arah simbol B dituliskan disebelah kiri)

Teorema:

L dikenali oleh MT dua arah dengan pita tak terbatas, jika dan hanya jika L dikenali oleh MT satu arah.

MT Multi-Pita

MT ini mempunyai pita ganda dan head ganda, masing-masing dapat melakukan gerakan yang berbeda arah. Sekali melakukan gerakan dapat terjadi :

1. perubahan status
2. pergantian simbol yang di scan dengan simbol baru
3. perpindahan masing-masing head ke kiri/kanan atau tetap di posisi semula

Teorema:
Jika balas L diterima oleh MT pita-ganda , maka MT tersebut juga diterima oleh MT dengan pita tunggal.

Contoh:

Bahasa $L = \{ww^R|win(0+1)^*\}$ dapat dikenali/diterima oleh MT dengan pita tunggal dengan melakukan perpindahan head maju dan mundur pada pita masukan, men-cek simbol pada kedua ujung pita dan membandingkannya.

Untuk mengenali L dengan MT dua arah dilakukan dengan meng-copy terlebih dulu pita masukan ke pita yang lain, kemudian dengan arah berlawanan dua head membandingkan satu dengan yang lain.

Jumlah perpindahan untuk mengenali L kurang-lebih kuadrat dari panjang masukan untuk MT dengan pita-tunggal, sedangkan untuk pita ganda cukup dengan n (panjang masukan) saja.

Non-Deterministik MT

MT ini mempunyai satu arah perpindahan saja dengan pita tak terbatas, sekali perpindahan ada beberapa alternatif pilihan ke-kiri atau ke kanan. Non-deterministik MT menerima input jika serangkaian perpindahan akan menuju ke final state. MT ini tidak diperbolehkan untuk menerima bahasa baru.

Jika L diterima oleh non-deterministik MT M_1, maka L diterima oleh beberapa deterministik MT M_2

Lanjutan

Bukti:
Untuk sebarang pita dan simbol pita akan terdapat sejumlah perpindahan yang terbatas. Perpindahan ini dapat diberi nomor 1;2;r Bilangan ini digunakan untuk penomoran serangkaian perpindahan dari M_1. Dalam situasi tertentu terdapat perpindahan yang kurang dari r.

M_2 mempunyai tiga pita. Pita pertama digunakan untuk pita masukan, pita digunakan untuk menuliskan penomoran tersebut, sedangkan yang ketiga untuk menuliskan setiap serangkain perpindaha dari pita ke dua.

Setelah dicopykan ke pita ke tiga, M_2 mensimulasikan M_1 dengan dengan menggunakan pita ke tiga. Bila M_1 masuk ke ¯nal state maka M_2 juga masuk ke ¯nal state, dan sebaliknya.

MT Multi-dimensi

MT ini mempunyai bentuk array k-dimensi, bila k diambil 2 perpindahan head bisa ke kiri/kanan atau atas/bawah yang merupakan baris dan kolom. Bila MT ini dinyatakan dalam MT satu dimensi maka antara baris dipisahkan dengan tanda * dan keseluruhan blok (persegi panjang) dipisahkan oleh **

Teorema:
Jika L diterima oleh oleh MT M_2 dua dimensi, maka L diterima MT M_1 satu dimensi.

MT Multi-head

MT multi-head mempunyai head lebih dari satu, masing-masing head dapat perpindah yang tidak bergantung dari head yang lain.

Teorema:
Jika L diterima oleh MT M_1 dengan head sebanyak k, maka L diterima oleh MT dengan head tunggal.

Off-Line MT
Mesing Turing Off-line mempunyai pita masukan yang bersifat read-only (dapat dibaca saja). Biasanya pita masukan ini ditandai dengan c di ujung kiri dan \$ di ujung kanan.

SEKIAN

Terima Kasih