Seri bahan kuliah Algeo #26

Aljabar Quaternion

(Bagian 2)

Update 2023

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

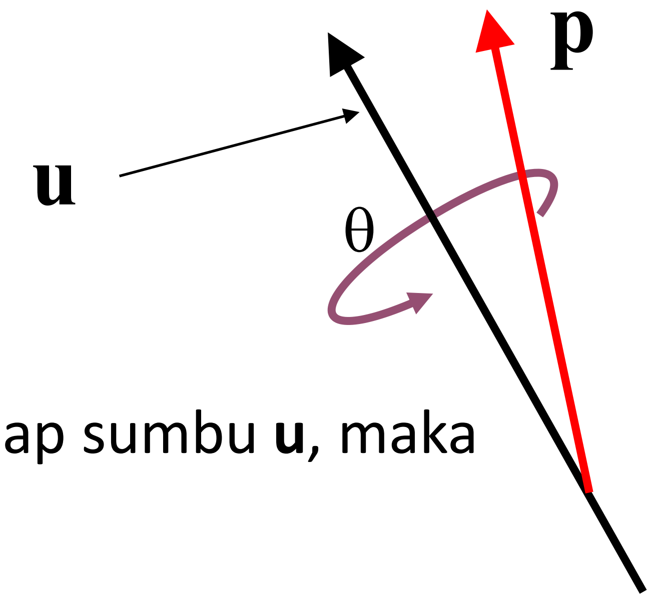
STEI-ITB

2023

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Rotasi Vektor dengan Quaternion



- Misalkan **p** adalah sebuah vektor di R^3
- Vektor **p** diputar sejauh θ berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu **u**, maka bayangannya adalah **p'**, yang dihitung dengan persamaan:

$$\boxed{\mathbf{p}' = q\mathbf{p}q^{-1}}$$

yang dalam hal ini,

$$\mathrm{p} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$$

$$p = 0 + ix + jy + kz$$

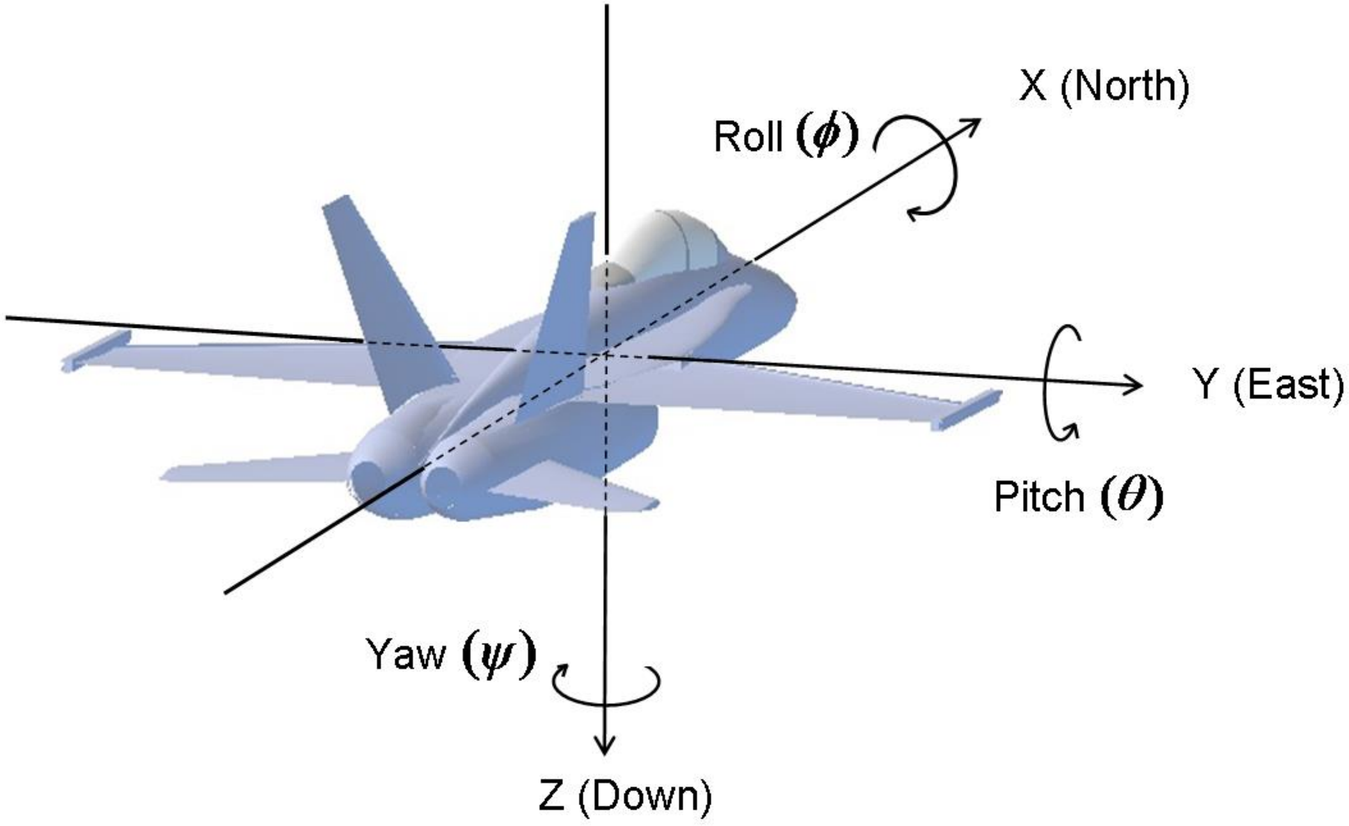
$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{\mathbf{u}}$$

$$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\hat{\mathbf{u}}$$

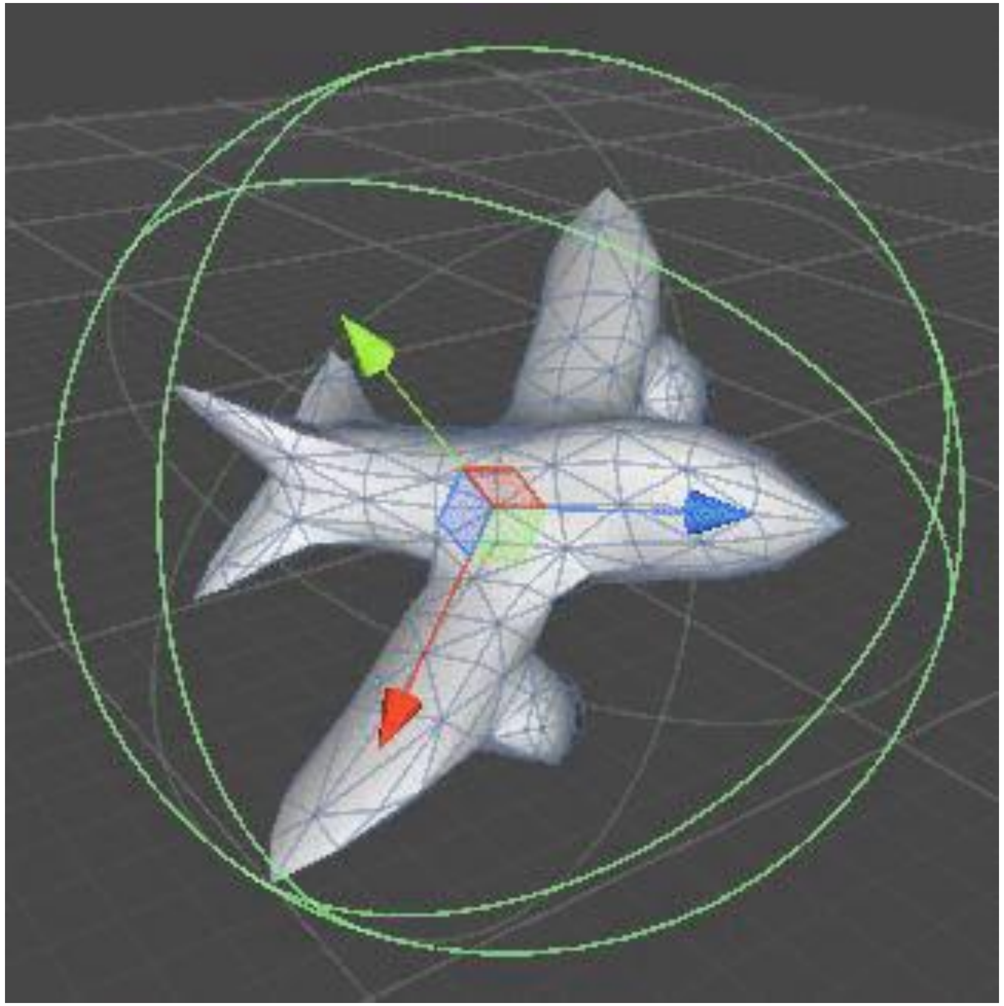
$\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor satuan dari vektor **u** = xi + y**j** + zk

$$\hat{\mathbf{u}} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

dengan $||\hat{\mathbf{u}}|| = 1$



Sumber gambar: http://www.chrobotics.com/library/understanding-quaternions



Contoh 2: Misalkan sebuah titik P(0, 1, 1), atau sebagai vektor **p** = (0, 1, 1), diputar berlawanan arah jarum jam sejauh θ = 90° dengan sumbu rotasinya adalah **u** = *j*. Tentukan vektor bayangannya.

Jawaban:

u = **j**, panjangnya sama dengan satu, maka vektor satuannya juga sama yaitu $\hat{\mathbf{u}}$ = *j*

p = (0, 1, 1) = 0**i** + **j** + **k**

Nyatakan **p** dalam quaternion $\rightarrow$ $p = 0 + 0i + j + k$

$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 45^\circ + \sin 45^\circ(0i + j + 0k)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(0i + j + 0k) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + 0i + j + 0k)$$

$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 45^\circ - \sin 45^\circ(0i + j + 0k)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(0i + j + 0k) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0i - j - 0k)$$

Bayangan vektor **p** adalah **p’**:

$$\mathbf{p}' = q\mathbf{p}q^{-1}$$

Dalam bentuk perkalian quaternion:

$$p' = qpq^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + 0i + j + 0k)(0 + 0i + j + k)\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0i - j - 0k)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \quad + i + j + k)\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0i - j - 0k)$$

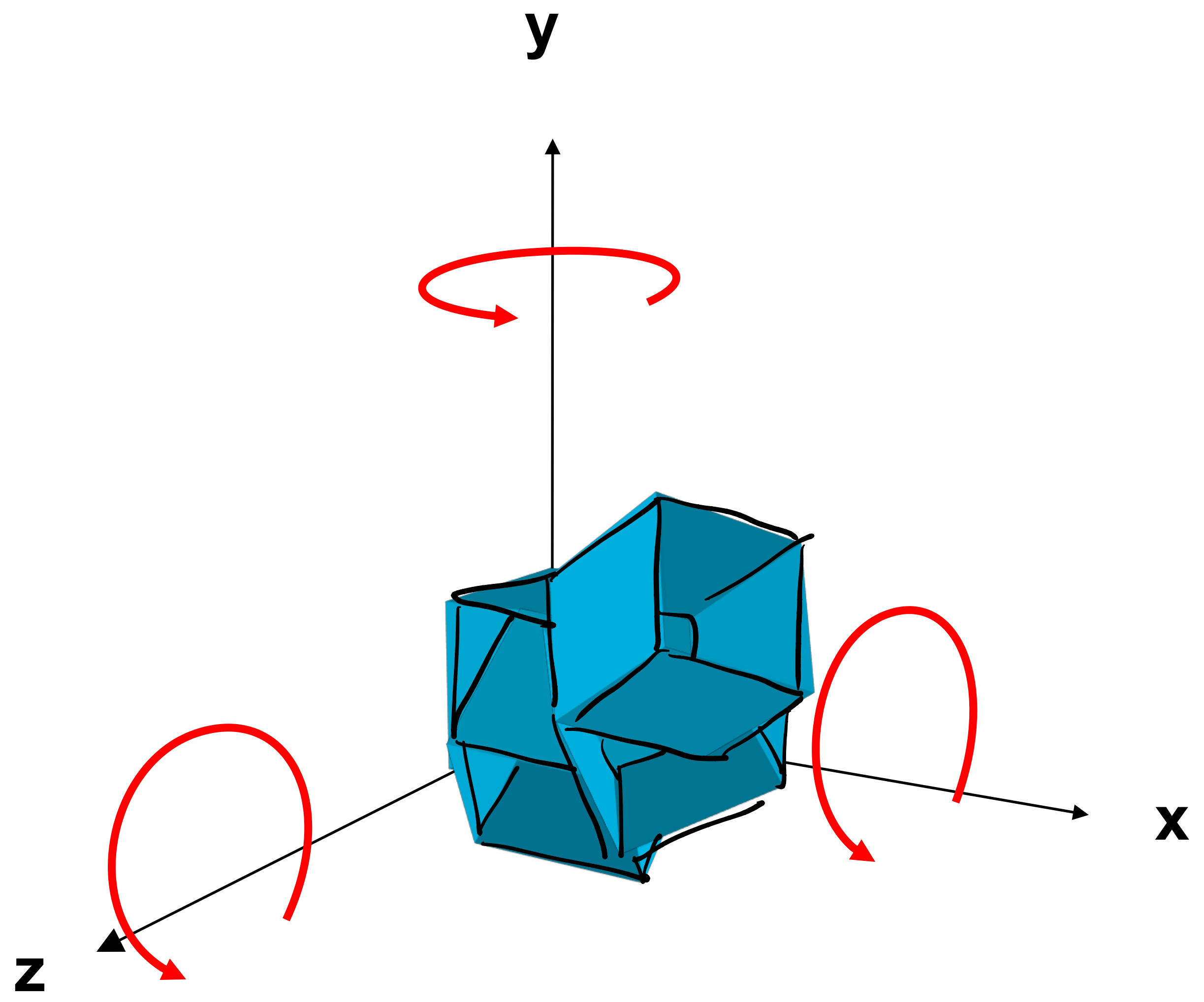
$$= \frac{1}{2}(-1 \; + 1 + j + i + j + k \; + i - k)$$

$$= \frac{1}{2}(0 \; + 2i + 2j + 0k)$$

$$= 0 + i + j + 0k$$

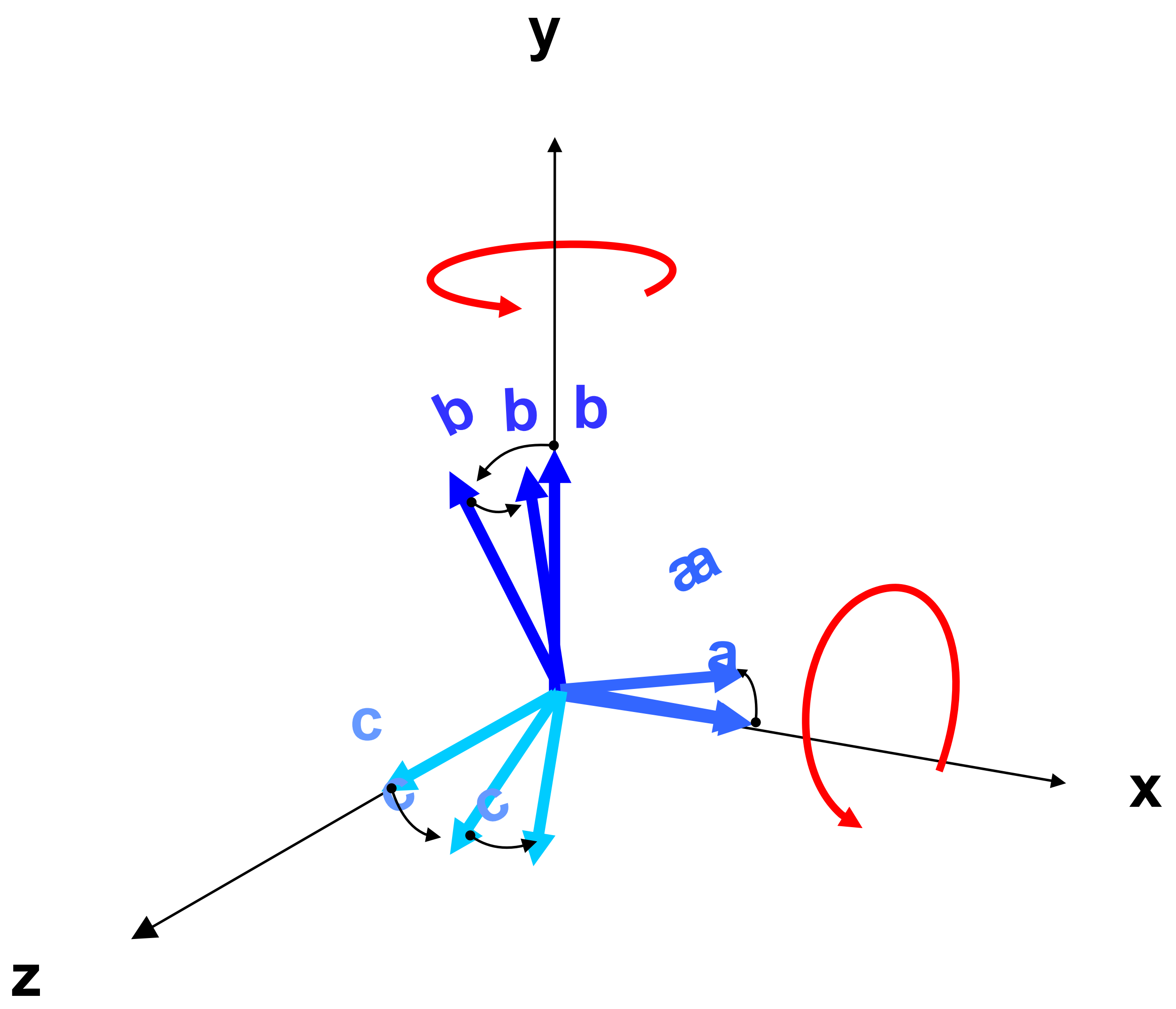
Jadi, **p’** = (1, 1, 0) = **i** + **j**

Let’s do rotation!

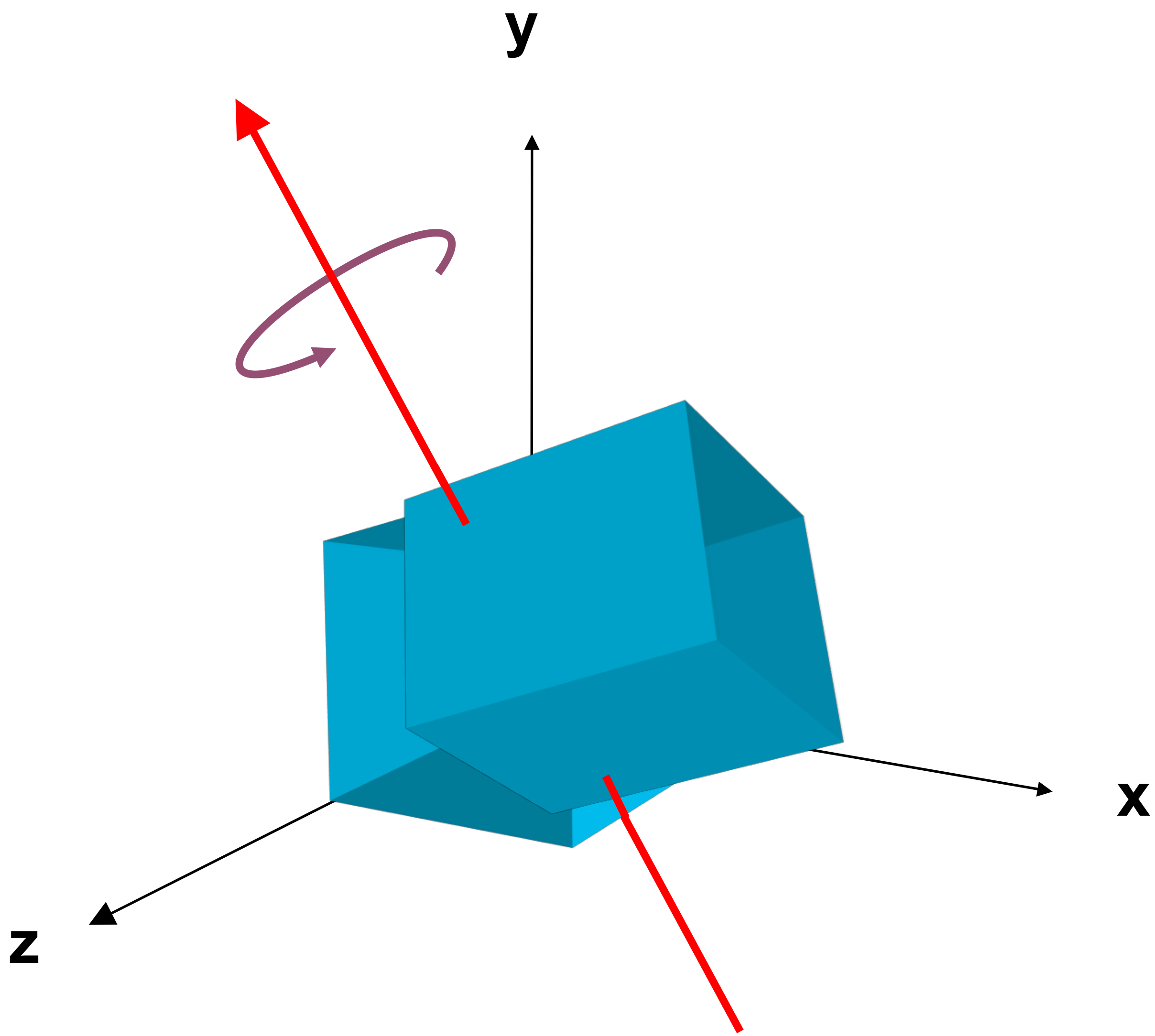


Sumber: Jyun-Ming Chen, 3D-Kinematics

Let’s do rotation!



Let's do another one!



Contoh 3 (Soal UAS 2019): Misalkan sebuah vektor **p** = 2**i** – 4**j** + 5**k** diputar berlawanan arah jarum jam sejauh θ = 120° dengan sumbu rotasinya adalah **u** = **i** + **j** + **k**. Tentukan vektor bayangannya.

<u>Jawaban</u>:

u = **i** + **j** + **k**, panjangnya = $\sqrt{3}$, maka vektor satuannya $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (**i** + **j** + **k**)

p = (2, –4, 5) = 2**i** – 4**j** + 5**k**

Nyatakan **p** dalam quaternion $\rightarrow$ *p* = 0 + 2i – 4j + 5k

$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 60° + \sin 60°(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k))$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k) = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$

$q^{-1} = \boxed{\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}}} = \cos 60° - \sin 60°(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k))$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)) = \frac{1}{2}(1 - i - j - k)$

Bayangan vektor **p** adalah **p’**:

$$\mathbf{p}' = q\mathbf{p}q^{-1}$$

Dalam bentuk perkalian quaternion:

$$p' = qpq^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i + j + k)(0 + 2i - 4j + 5k)\ \frac{1}{2}\ (1 - i - j - k)$$

$$= \frac{1}{2}\ (11i - 7j - k - 3)\ \frac{1}{2}\ (1 - i - j - k)$$

$$= \frac{1}{4}(20i + 8j - 16k + 0)$$

$$= 0 + 5i + 2j - 4k$$

Jadi, **p’** = (5, 2, –4) = 5**i** + 2**j** – 4**k**

Latihan (Kuis 2022)

Diberikan sebuah vektor p = (1,2,3). Vektor p diputar sebesar 240 derajat berlawanan arah jarum jam dengan sumbu putarnya adalah u = (1,1,1). Hitunglah vektor bayangan dari p (misal p') dengan rotasi diatas.

Jawaban:

u = (1, 1, 1) →) $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

p = (1, 2, 3) = **i** +2**j** + 3**k** → **p** dalam quaternion p = 0 + i + 2j + 3k

q= cos(θ/2) + sin(θ/2)$\hat{\mathbf{u}}$ = cos 120° + sin 120°($\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k)

$= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k) $= \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}$ (i + j + k) = $\frac{1}{2}$ (-1 + i + j + k)

q^{-1} = cos(θ/2) - sin(θ/2)$\hat{\mathbf{u}}$ = cos 120° - sin 120°($\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k)

= $\frac{-1}{2}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$($\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k) = $\frac{-1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ (i + j + k) = $\frac{1}{2}$ (-1 - i - j - k)

p' = qpq^{-1} = $\frac{1}{2}$ (-1 + i + j + k)(0 + i + 2j + 3k) $\frac{1}{2}$ (-1 - i - j - k)

= $\frac{1}{4}$ (-1 + i + j + k)(0 + i + 2j + 3k)(-1 - i - j - k)

= $\frac{1}{4}$ (0 + 8i + 12j+ 4k) = 0 + 2i + 3j + k

Jadi bayangan vektor **p** adalah **p'** = (2, 3, 1) = 2**i** + 3**j** + **k**

Latihan (Kuis 2020)

Diketahui vektor **p**=(1,1,1), yang diputar terhadap sumbu **u**=(1,1,0) sebesar 90^o berlawanan jarum jam. Sebutkan bayangannya **p’**. Tentukan:

(a) Vektor **q** dan **q**$^{-1}$ yang berfungsi sebagai rotor.

(b) Tentukan **p’**

Jawaban:

(a) q = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; q^{-1} = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

(b) $p' = (\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ atau p'= (1.70, 0.29, 0)

Latihan (Kuis 2021)

Diberikan sebuah vektor **p =** *(2,3,1)*. Vektor **p** diputar sebesar 120 derajat berlawanan arah dengan jarum jam dengan sumbu putarnya adalah **u =** *(1,1,1)*.

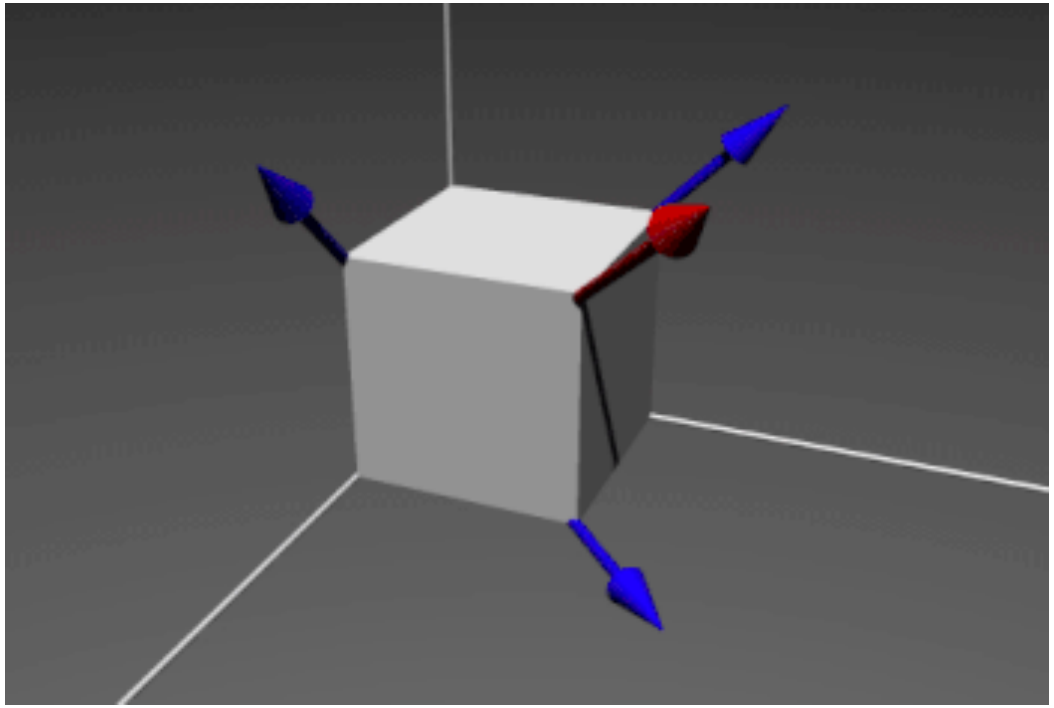
a. Tentukan quaternion q dan q^{-1} yang merupakan rotor.

b. Hitunglah vektor bayangan dari **p** (misal **p’**) dengan rotasi diatas.

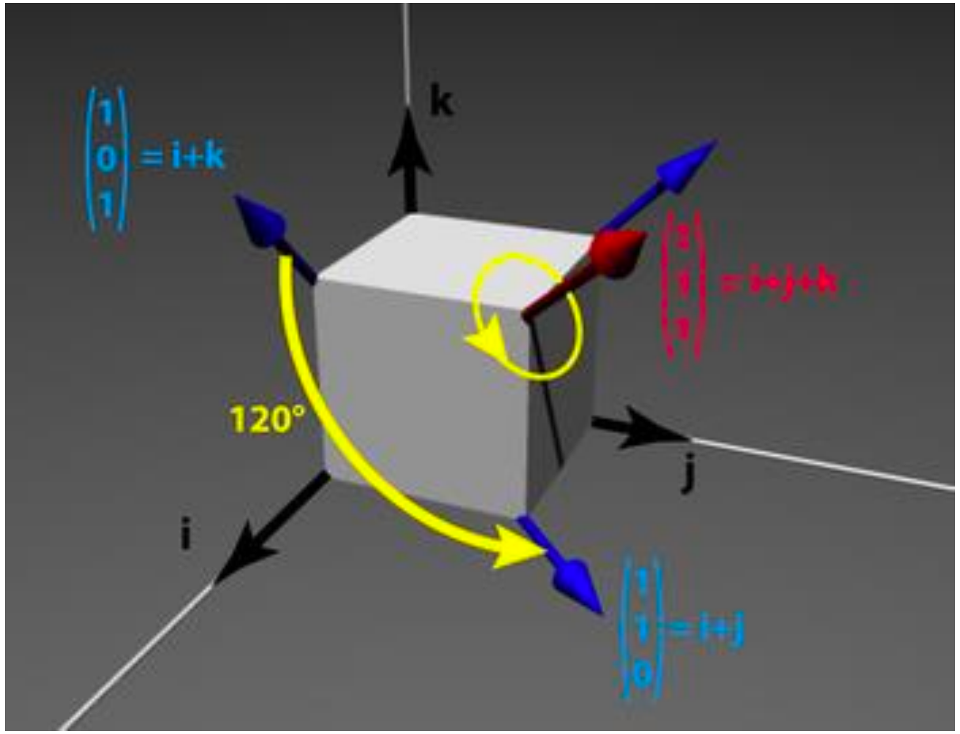
Jawaban:

a) q = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5),   q’ = (0.5, -0.5,-0.5, -0.5)

b) p = (1, 2, 3)



A rotation around its diagonal



Position and Landmark

v = i + k Sumbu putar: **u = i +j + k**
Sudut putaran = 120°
v’ = i + j

Sumber: https://gepettoweb.laas.fr/hpp/pinocchio/doxygen-html/md_doc_c-maths_b-rigid-bodies.html

(1) Kode program rotasi vektor dengan quaternion

"Dari Contoh 2: Misalkan sebuah titik P(0, 1, 1), atau sebagai vektor p = (0, 1, 1), diputar berlawanan arah jarum jam sejauh 90 derajat dengan sumbu rotasinya adalah u = j. Tentukan vektor bayangannya."

```
# Buat objek quaternion dengan sumbu putar u = 0i + j + 0k dan
# sudut putar = 90 derajat
u = Quaternion(axis=[0.0, 1.0, 0.0], degrees = 90)

# Rotasi vektor p = (0, 1, 1) terhadap sumbu u sejauh 90 derajat
bayangan = u.rotate(Quaternion(vector=[0, 1, 1]))
print(bayangan)
```

[37]:
```python
# Buat objek quaternion yang menyatakan sumbu rotasi u = 0i + j + 0k dan sudut putar = 90 derajat
u = Quaternion(axis=[0.0, 1.0, 0.0], degrees = 90)
```

[38]:
```python
bayangan = u.rotate(Quaternion(vector=[0,1,1]))  # Rotasikan vektor p = (0, 1, 1) terhadap sumbu u
```

[39]:
```python
print(bayangan)
```

```
0.000 +1.000i +1.000j +0.000k
```

(2) Kode program rotasi vektor dengan quaternion

*"Dari Contoh 3: Misalkan sebuah vektor **p** = 2**i** – 4**j** + 5**k** diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $\theta = 120^\circ$ dengan sumbu rotasinya adalah **u** = **i** + **j** + **k**. Tentukan vektor bayangannya. "*

```
[42]: # Buat objek quaternion yang menyatakan sumbu rotasi = i + j + k dan suut putar 120 derajat
      u = Quaternion(axis=[1, 1, 1], degrees = 120)
```

```
[43]: bayangan = u.rotate(Quaternion(vector=[2, -4, 5]))
```

```
[44]: print(bayangan)
```

```
-0.000 +5.000i +2.000j -4.000k
```

Latihan

(Soal UAS 2015)

Diketahui sebuah titik P=(1,1,1) diputar terhadap sumbu $\mathbf{u} = j + k$ sebesar 180^o, tentukan koordinat titik P' yang merupakan hasil dari rotasi tersebut.

notes

$p = (1, 1, 1)$

$u = j + k$

$180°$

$i \cdot i = -1$

$j \cdot j = -1$

$k \cdot k = -1$

$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\hat{u}$

$= \cos 90° + \sin 90° \left(\frac{0i + j + k}{\sqrt{2}}\right)$

$= 0 + 0i + \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 0i + j + k)$

$q^{-1} = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\hat{u}$

$= 0 - 0i - \frac{1}{\sqrt{2}}j - \frac{1}{\sqrt{2}}k = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 - 0i - j - k)$

1

$k \quad j$

$p' = qpq^{-1}$

$= (0 + 0i + \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k)(0 + i + j + k)(0 - 0i - \frac{1}{\sqrt{2}}j - \frac{1}{\sqrt{2}}k)$

$= 0j - \frac{1}{\sqrt{2}}k + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i + 0k + \frac{1}{\sqrt{2}}j - \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0 - 0i - \frac{1}{\sqrt{2}}j - \frac{1}{\sqrt{2}}k)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0j - k + 1 + i + 0k + j - i + 1) \ \frac{1}{\sqrt{2}}(0 - 0i - j - k)$

$= \frac{1}{2}(2 + 0i + j - k)(0 - 0i - j - k)$

$= \frac{1}{2}(0 - 0i - 2j - 2k + 0i - 0 - 0k + 0j + 0j + 0k - 1 - i - 0 + 0j - i + 1)$

$= \frac{1}{2}(0 - 2i - 2j - 2k)$

$= -i, -j, -k$

$p' = qpq^{-1}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(j + k)(i + j + k)\frac{1}{\sqrt{2}}(-j - k)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-k - 1 + i + j - i - 1)\frac{1}{\sqrt{2}}(-j - k)$

$= \frac{1}{2}(-2 + j - k)(-j - k)$

$= \frac{1}{2}(2j + 2k + 1 - i - i - 1)$

$= \frac{1}{2}(0 - 2i + 2j + 2k) = -i + j + k$