

Seri bahan kuliah Algeo #16 - 2023

Ruang Vektor Umum

(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Basis

- Jika V adalah ruang vektor dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor V , maka S dinamakan **basis** untuk V jika:
 - (a) S bebas linier
 - (b) S membangun V
- Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V , maka setiap vektor \mathbf{v} di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

tepat dengan satu cara

Contoh 11: Vektor-vektor satuan standard $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ adalah basis standard untuk \mathbb{R}^3 , karena

- (a) Sudah ditunjukkan pada Contoh 10 bahwa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bebas linier
- (b) Sudah ditunjukkan pada Contoh 3 bahwa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ membangun \mathbb{R}^3

Secara umum, vektor-vektor satuan standard,

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., dan $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$,
adalah basis standard untuk \mathbb{R}^n

Contoh 12: Perhatikan bahwa $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ dan $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ adalah basis untuk \mathbb{R}^3 .

Jawaban:

(a) Harus ditunjukkan bahwa \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , dan \mathbf{v}_3 bebas linier sbb:

$$k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4) = \mathbf{0}$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah **trivial** yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$

(b) Harus ditunjukkan bahwa \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , dan \mathbf{v}_3 membangun \mathbb{R}^3 sbb:

Misalkan vektor sembarang $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ di \mathbb{R}^3 dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$

$$(w_1, w_2, w_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= w_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= w_2 \\ k_1 + 4k_3 &= w_3 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan.

Untuk (a) dan (b) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mempunyai balikan (*invers*), yaitu $\det(A) \neq 0$. Karena $\det(A) = -1$ (periksa!), maka matriks A tersebut dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0$$

$$k_1 + 4k_3 = 0$$

memiliki solusi trivial, dan SPL:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = w_1$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = w_2$$

$$k_1 + 4k_3 = w_3$$

dapat dipecahkan. Jadi, \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , dan \mathbf{v}_3 adalah basis untuk \mathbb{R}^3 .

- Contoh basis lainnya:

1. $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ adalah basis untuk ruang vektor polinom P_n

2. $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dan $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang vektor matriks 2×2 , yaitu M_{22}

Dimensi

- **Dimensi** ruang vektor V yang berhingga, dinyatakan dengan $\dim(V)$, adalah banyaknya vektor di dalam basis.
- Contoh:
 - (i) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, sebab basis standardnya memiliki 2 vektor (\mathbf{i} dan \mathbf{j})
 - (ii) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, sebab basis standardnya memiliki 3 vektor (\mathbf{i} , \mathbf{j} dan \mathbf{k})
 - (iii) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, sebab basis standardnya memiliki n vektor
 - (iv) $\dim(P_n) = n + 1$, sebab basis standardnya memiliki $n + 1$ vektor, yaitu
$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$
 - (v) $\dim(M_{mn}) = mn$, sebab basis standardnya memiliki mn vektor

Contoh 13: Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi SPL homogen berikut:

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

Jawaban: Bila SPL tersebut diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss, maka dihasilkan solusinya sebagai berikut:

$$x_1 = -s - t; x_2 = s, x_3 = -t; x_4 = 0, x_5 = t$$

Solusi SPL dalam bentuk vektor (matriks kolom):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi SPL dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$$

yang dalam hal ini, $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$ dan $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$

Solusi SPL tersebut membentuk ruang vektor V . Jadi, V dibangun oleh \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 .

Dapat ditunjukkan bahwa \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 bebas linier (buktikan!).

Jadi basis ruang vektor solusi SPL adalah $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dan $\dim(V) = 2$.

Latihan (Kuis 2021)

Diketahui sistem persamaan linear sbb :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$$

- a) Tentukanlah basisnya
- b) Tentukanlah dimensinya.

Jawaban:

Harus dicari solusi SPL dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \longrightarrow x_3 = -2x_4 + 2x_5$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \longrightarrow x_1 = -2x_2 + 5x_4 - 7x_5$$

Solusinya :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka yang menjadi basisnya adalah :

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan dimensinya adalah 3 (karena basisnya ada 3)

Vektor Koordinat (relatif pada basis)

- Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V , sedemikian sehingga setiap vektor \mathbf{v} di dalam V dapat dinyatakan sebagai

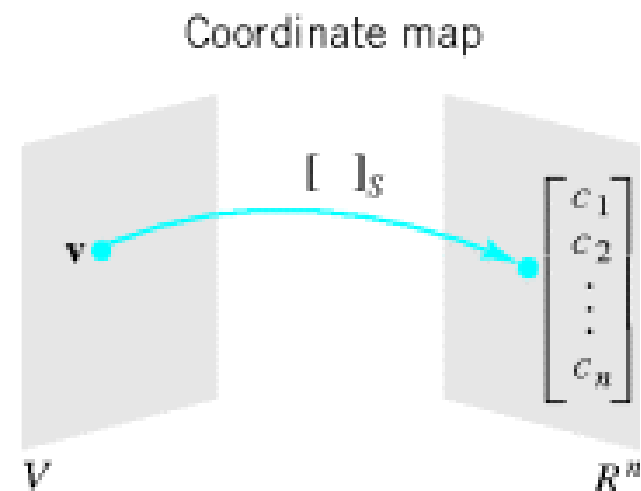
$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

maka koordinat \mathbf{v} relatif terhadap basis S adalah

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

atau dalam bentuk matriks koordinat:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$



Contoh 14: Sudah dibuktikan pada Contoh 12 bahwa $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ dan $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ adalah basis untuk \mathbb{R}^3 .

(a) Tentukan vektor koordinat $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ relatif terhadap basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

(b) Carilah vektor di \mathbb{R}^3 yang koordinat vektornya adalah $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$

Jawaban:

(a) $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Diperoleh SPL:

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 2c_2 + 3c_3 & = & 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 & = & -1 \\ c_1 & + & 4c_3 = 9 \end{array}$$

Solusi SPL tersebut adalah $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$, maka $(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$

(b) $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7)$

Mengubah Basis

- Jika \mathbf{v} adalah vektor di dalam V dan kita mengubah basis V dari basis B menjadi basis B' , bagaimana mengubah koordinat vektor $[\mathbf{v}]_B$ menjadi $[\mathbf{v}]_{B'}$?
- Jika kita mengubah basis ruang vektor V dari basis lama $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ menjadi basis baru $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$, maka untuk setiap vektor \mathbf{v} di dalam V , koordinat lama vektor $[\mathbf{v}]_B$ menjadi $[\mathbf{v}]_{B'}$ dihubungkan dengan relasi berikut:

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$$

yang dalam hal ini, kolom-kolom P adalah koordinat vektor basis baru relatif terhadap basis lama, yakni kolom-kolom P adalah

$$[\mathbf{u}'_1]_B, [\mathbf{u}'_2]_B, \dots, [\mathbf{u}'_n]_B$$

- P disebut **matriks transisi** dari basis B' ke basis B .
- Jika P adalah matriks transisi dari basis B' ke basis B untuk ruang vektor V , maka matriks P dapat dibalikkan dan P^{-1} adalah matriks transisi dari B ke B' .

- **Algoritma menghitung $P_{B \rightarrow B'}$:**

Step 1: Bentuklah matriks $[B' \mid B]$

Step 2: Lakukan operasi baris elementer (OBE) untuk mereduksi matriks dari step 1 menjadi matriks eselon baris tereduksi.

Step 3: Matriks hasil step 2 akan menjadi $[I \mid P_{B \rightarrow B'}]$

Step 4: Ruas kanan dari hasil step 3 (sebelah tanda \mid) menjadi $P_{B \rightarrow B'}$

- Algoritma di atas dapat diringkas ke dalam diagram:

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] \xrightarrow{\text{OBE}} [I \mid P_{B \rightarrow B'}]$$

Contoh 15: Di dalam R^2 , basis standardnya adalah $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} = \{(1,0), (0, 1)\}$. Basis yang lain untuk R^2 adalah $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\} = \{(1, 1), (2, 1)\}$

- (a) Tentukan matriks transisi dari B' ke B
- (b) Tentukan matriks transisi dari B ke B'

Jawaban:

- (a) Pada kasus ini, $B' =$ basis lama, dan $B =$ basis baru

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} [I \mid P_{B' \rightarrow B}]$$

Karena ruas kiri sudah berbentuk matriks identitas, maka tidak perlu dilakukan OBE, sehingga matriks transisi adalah $P_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (b) Pada kasus ini, $B =$ basis lama, dan $B' =$ basis baru

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Matriks transisi adalah $P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Menghitung koordinat vektor \mathbf{v} dari basis B ke B' :

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\mathbf{v}]_B$$

- Menghitung koordinat vektor \mathbf{v} dari basis B' ke B :

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \rightarrow B} [\mathbf{v}]_{B'}$$

Contoh 16: Berdasarkan Contoh 15, misalkan koordinat vektor \mathbf{v} pada basis B' adalah $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka koordinat \mathbf{v} pada basis B adalah

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \rightarrow B} [\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 17 (soal kuis 2 tahun 2019): Diketahui basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ dan basis $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ sebagai berikut: $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$ dan $\mathbf{u}'_1 = (3, 1, -5)$, $\mathbf{u}'_2 = (1, 1, -3)$, $\mathbf{u}'_3 = (-1, 0, 2)$.

- Tentukan matriks transisi dari B ke B'
- Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B
- Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B'
- Tentukan koordinat vektor \mathbf{w} pada basis B, jika koordinat W pada basis standard (S) adalah $(\mathbf{w})_S = (-5, 8, -5)$.

basis standard = matriks identitas

$$S = \{i, j, k\} \\ = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Jawaban:

- Matriks transisi dari B ke B':

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right) = (I | P_{B \rightarrow B'})$$

$$\text{Jadi, matriks transisi } P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) Matriks transisi dari basis standard ke basis B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) = (I|P_{S \rightarrow B})$$

$$\text{Jadi, matriks transisi } P_{S \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Matriks transisi dari basis standard ke basis B'

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = (I|P_{S \rightarrow B'})$$

$$\text{Jadi, matriks transisi } P_{S \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Koordinat vektor \mathbf{w} pada basis B, jika koordinat \mathbf{w} pada basis standard adalah $[\mathbf{w}]_S = (-5, 8, -5)$ dihitung sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Latihan (Kuis 2021)

Misalkan $B1 = \{u1, u2\}$ dan $B2 = \{v1, v2\}$ adalah basis-basis untuk ruang vektor $R2$, yang dalam hal ini $u1 = (2, 2)$, $u2 = (4, -1)$, $v1 = (1, 3)$ dan $v2 = (-1, -1)$

- a) Tentukan matriks transisi dari $B1$ ke $B2$
- b) Tentukan koordinat vektor $\mathbf{w} = (5, -3)$ relatif pada basis $B1$ lalu gunakan matriks transisi dari $B1$ ke $B2$ untuk menghitung koordinat vektor \mathbf{w} relatif pada basis $B2$
- c) Lalu tentukan vektor \mathbf{w} dengan basis $B2$ tersebut.

Jawaban:

a) Pada kasus ini, B1 = basis lama, dan B2 = basis baru

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 & -13/2 \end{array} \right)$$

Matriks transisi adalah $P_{B1 \rightarrow B2} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{w} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \rightarrow (5, -3) = c_1(2, 2) + c_2(4, -1)$

Diperoleh SPL:

$$2c_1 + 4c_2 = 5$$

$$2c_1 - c_2 = -3$$

$$\text{Solusi: } c_1 = -7/10; c_2 = 8/5$$

Jadi, koordinat \mathbf{w} relative pada basis B1 adalah $(\mathbf{w})_{B1} = (-7/10, 8/5)$

Koordinat vektor \mathbf{w} relative pada basis B2 adalah:

$$(\mathbf{w})_{B2} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/10 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(Periksa kebenaran koordinat relative w pada basis B_2 sbb:

$$(5, -3) = c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1(1, 3) + c_2(-1, -1)$$

Diperoleh SPL:

$$c_1 - c_2 = 5$$

$$3c_1 - c_2 = -3$$

$$\text{Solusi: } c_1 = -4 \text{ dan } c_2 = -9$$

Jadi, koordinat w relative pada basis B_2 adalah $(w)_{B_2} = (-4, -9)$

c) Vektor w pada basis B_2 adalah: $w' = c_1 v_1 + c_2 v_2 = -4(1, 3) - 9(-1, -1)$
$$= (-4, -12) + (9, 9) = (5, -3)$$

Tidak berubah (tetap). Yang berubah adalah koordinatnya.

Bersambung ke Bagian 3