

# Relasi dan Fungsi

## Bagian 1 (Update 2023)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika**  
**STEI - ITB**

# Pengantar Matriks

- Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks  $A$  yang berukuran dari  $m$  baris dan  $n$  kolom ( $m \times n$ ) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran  $n \times n$ .

- Dalam notasi ringkas, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi  $A = [a_{ij}]$ .
- **Contoh 1.** Di bawah ini adalah matriks yang berukuran  $3 \times 4$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks simetri adalah matriks yang  $a_{ij} = a_{ji}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ .
- **Contoh 2.** Di bawah ini adalah contoh matriks simetri.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks *zero-one* (0/1) atau matriks biner adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.
- **Contoh 3.** Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Relasi



- Jika terdapat dua himpunan  $A$  dan  $B$ , bagaimana menyatakan hubungan antara anggota kedua himpunan tersebut?
- Kita bisa menggunakan pasangan terurut (*ordered pairs*)  $(a, b)$  untuk menghubungkan  $a$  dan  $b$ , yang dalam hal ini  $a \in A$  dan  $b \in B$ .
- Kita katakan  $a$  dihubungkan dengan  $b$  oleh sebuah **relasi**.

**Contoh 1:** Misalkan

$$A = \{\text{Hasan, Tanti, Rommi, Yusuf, Aditya}\}$$

adalah himpunan mahasiswa,

$$B = \{\text{Toyota, Daihatsu, Mercedes, VW}\}$$

adalah himpunan kendaraan.

Misalkan  $R$  adalah relasi yang menyatakan mahasiswa dan mobil yang dikendarainya.

$$R = \{(\text{Hasan, Daihatsu}), (\text{Rommi, Toyota}), (\text{Yusuf, Mercedes}), \\ (\text{Aditya, Toyota})\}$$

ini berarti Hasan mengendarai Daihatsu, Rommi mengendarai Toyota, Yusuf mengendarai Mercedes, dan Aditya mengendarai Toyota. Tanti tidak mengendarai mobil apapun. Mobil VW tidak dikendarai siapapun di dalam relasi itu.

**Contoh 2:** Misalkan

$$A = \{\text{Daffa, Yosef, Harkunti, Mahendra, Wayan}\}$$

adalah himpunan mahasiswa,

$$B = \{A, AB, B, BC, C, D, E\}$$

adalah himpunan nilai.

Misalkan  $R$  adalah relasi yang menyatakan mahasiswa dan nilai mata kuliah Matdis yang diperolehnya pada semester ganjil.

$$R = \{(\text{Daffa}, BC), (\text{Yosef}, A), (\text{Harkunti}, A), (\text{Mahendra}, B)\}$$

Ini berarti Daffa mendapat BC, Yosef mendapat A, Harkunti mendapat A, Mahendra mendapat B. Wayan tidak mengambil mata kuliah Matdis. Tidak ada mahasiswa yang mendapat C, D, dan E.



# Definisi Relasi



- Relasi biner  $R$  antara himpunan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan bagian dari  $A \times B$ .
- Notasi:  $R \subseteq (A \times B)$ .
- $a R b$  adalah notasi untuk  $(a, b) \in R$ , yang artinya  $a$  dihubungkan dengan  $b$  oleh  $R$
- $a \not R b$  adalah notasi untuk  $(a, b) \notin R$ , yang artinya  $a$  tidak dihubungkan oleh  $b$  oleh relasi  $R$ .
- Himpunan  $A$  disebut daerah asal (*domain*) dari  $R$ , dan himpunan  $B$  disebut daerah tujuan (*kodomain*) dari  $R$ .



**Contoh 3.** Misalkan  $A = \{\text{Amir, Budi, Cecep}\}$  dan  $B = \{\text{IF221, IF251, IF342, IF323}\}$  maka

$$A \times B = \{(\text{Amir, IF221}), (\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF342}), (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), (\text{Budi, IF342}), (\text{Budi, IF323}), (\text{Cecep, IF221}), (\text{Cecep, IF251}), (\text{Cecep, IF342}), (\text{Cecep, IF323})\}$$

Misalkan  $R$  adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

$$R = \{(\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), (\text{Cecep, IF323})\}$$

Dapat dilihat bahwa  $R \subseteq (A \times B)$ ,

- $A$  adalah daerah asal  $R$ , dan  $B$  adalah daerah tujuan dari  $R$ .
- $(\text{Amir, IF251}) \in R$  atau Amir  $R$  IF251
- $(\text{Amir, IF342}) \notin R$  atau Amir  $\nR$  IF342.

**Contoh 4.** Misalkan  $P = \{2, 3, 4\}$  dan  $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$ . Jika kita definisikan relasi  $R$  dari  $P$  ke  $Q$  dengan

$(p, q) \in R$  jika  $p$  habis membagi  $q$

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

# Relasi pada Sebuah Himpunan

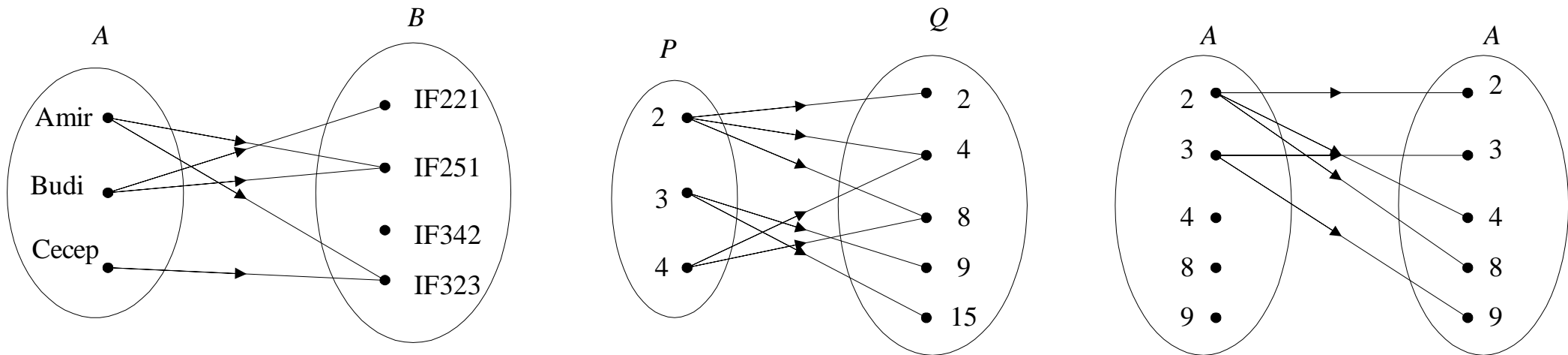
- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan  $A$  adalah himpunan bagian dari  $A \times A$ .
- Notasi:  $R \subseteq A \times A$

**Contoh 5.** Misalkan  $R$  adalah relasi pada  $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$  yang didefinisikan oleh  $(x, y) \in R$  jika  $x$  adalah faktor prima dari  $y$ .  
Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

# Representasi Relasi

## 1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah



Lingkaran kiri: daerah asal (domain)

Lingkaran kanan: daerah tujuan (kodomain)

## 2. Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal (domain), sedangkan kolom kedua menyatakan daerah tujuan (kodomain).

**Tabel 1**

<i>A</i>	<i>B</i>
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

**Tabel 2**

<i>P</i>	<i>Q</i>
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

**Tabel 3**

<i>A</i>	<i>A</i>
2	2
2	4
2	8
3	3
3	<del>3</del>

9

### 3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan  $R$  adalah relasi dari  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  dan  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ .
- Relasi  $R$  dapat disajikan dengan matriks  $M = [m_{ij}]$ ,

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

**Contoh 6.** Relasi  $R$  pada Contoh 3 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dalam hal ini,  $a_1 = \text{Amir}$ ,  $a_2 = \text{Budi}$ ,  $a_3 = \text{Cecep}$ , dan  $b_1 = \text{IF221}$ ,  $b_2 = \text{IF251}$ ,  $b_3 = \text{IF342}$ , dan  $b_4 = \text{IF323}$ .

Relasi  $R$  pada Contoh 4 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 4$ , dan  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 4$ ,  $b_3 = 8$ ,  $b_4 = 9$ ,  $b_5 = 15$ .

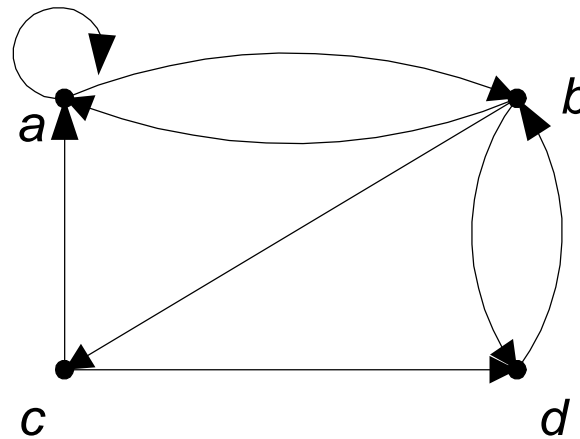
#### 4. *Representasi Relasi dengan Graf Berarah*

- Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
- Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi biner dari suatu himpunan ke himpunan lain.
- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)
- Jika  $(a, b) \in R$ , maka sebuah busur dibuat dari simpul  $a$  ke simpul  $b$ . Simpul  $a$  disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul  $b$  disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).
- Pasangan terurut  $(a, a)$  dinyatakan dengan busur dari simpul  $a$  ke simpul  $a$  sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).



**Contoh 7.** Misalkan  $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$  adalah relasi pada himpunan  $\{a, b, c, d\}$ .

$R$  direpresentasikan dengan graf berarah sbb:

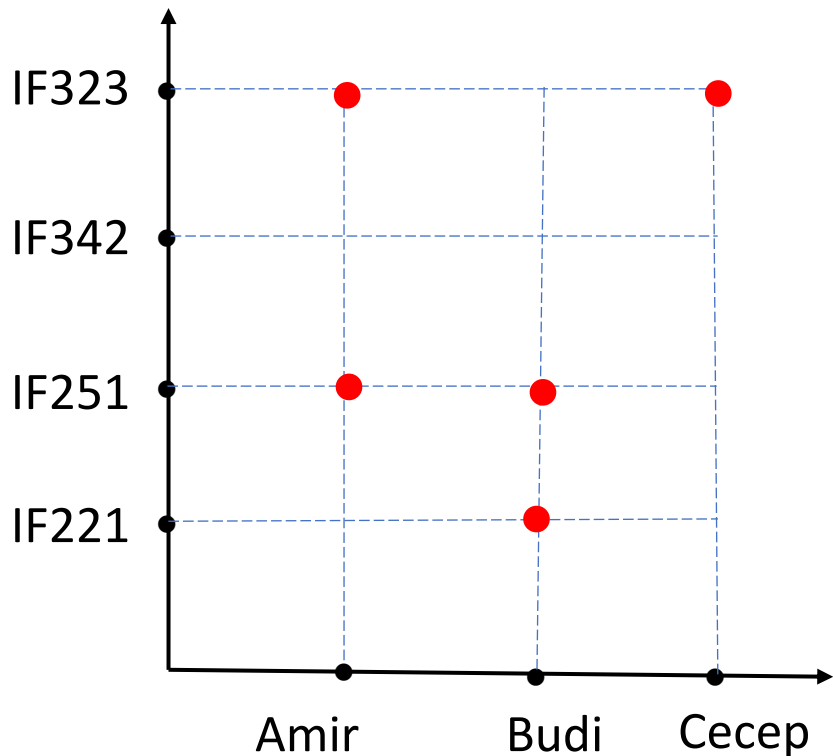


## 5. Representasi relasi dengan diagram kartesian

- Sumbu x menyatakan daerah asal (domain),
- Sumbu y menyatakan daerah tujuan (kodomain)
- Elemen relasi dinyatakan sebagai noktah (titik) di dalam diagram kartesian

Dari contoh 3,  $A = \{\text{Amir, Budi, Cecep}\}$  dan  $B = \{\text{IF221, IF251, IF342, IF323}\}$

dan  $R = \{(\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), (\text{Cecep, IF323})\}$



# Sifat-sifat Relasi

- Relasi yang didefinisikan pada sebuah himpunan dapat memiliki sifat seperti refleksif, menghantar, setangkup, tolak setangkup.

## 1. Refleksif (*reflexive*)

- Relasi  $R$  pada himpunan  $A$  disebut **refleksif** jika  $(a, a) \in R$  untuk setiap  $a \in A$ .  
setiap elemen ada relasi dengan diri sendiri
- Relasi  $R$  pada himpunan  $A$  tidak refleksif jika ada  $a \in A$  sedemikian sehingga  $(a, a) \notin R$ .  
ada elemen yang tidak punya relasi dengan diri sendiri

**Contoh 8.** Misalkan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , dan relasi  $R$  di bawah ini didefinisikan pada himpunan  $A$ , maka

- (a) Relasi  $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$  bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk  $(a, a)$ , yaitu  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$ , dan  $(4, 4)$ .
- (b) Relasi  $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$  tidak bersifat refleksif karena  $(3, 3) \notin R$ .

kalaupun ada 1 elemen aja yg gapunya relasi dgn dirinya sendiri, lgsg TIDAK REFLEKSIF

**Contoh 9.** Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga  $(a, a) \in R$  untuk setiap  $a \in A$ .

**Contoh 10.** Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif  $\mathbb{N}$ .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 5, \quad T : 3x + y = 10$$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan  $(2, 2)$  bukan anggota  $R$ ,  $S$ , maupun  $T$ .

■

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau  $m_{ii} = 1$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

## 2. Menghantar (*transitive*)

cukup cari kasus if T then F

- Relasi  $R$  pada himpunan  $A$  disebut **menghantar** jika  $(a, b) \in R$  dan  $(b, c) \in R$ , maka  $(a, c) \in R$ , untuk  $a, b, c \in A$ .

kalau ada 1 statement aja yg false, langsung GA MENGHANTAR

HARUS TRUE SMUA

**Contoh 11.** Misalkan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , dan relasi  $R$  di bawah ini didefinisikan pada himpunan  $A$ , maka

- (a)  $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$  bersifat menghantar. Lihat tabel berikut:

Pasangan berbentuk			
$(a, b)$	$(b, c)$	$(a, c)$	
$(3, 2)$	$(2, 1)$	$(3, 1)$	✓
$(4, 2)$	$(2, 1)$	$(4, 1)$	✓
$(4, 3)$	$(3, 1)$	$(4, 1)$	✓
$(4, 3)$	$(3, 2)$	$(4, 2)$	✓

- (b)  $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$  tidak menghantar karena  $(2, 4)$  dan  $(4, 2) \in R$ , tetapi  $(2, 2) \notin R$ , begitu juga  $(4, 2)$  dan  $(2, 3) \in R$ , tetapi  $(4, 3) \notin R$ .
- (c) Relasi  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  jelas menghantar
- (d) Relasi  $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$  menghantar karena tidak ada  $(a, b) \in R$  dan  $(b, c) \in R$  sedemikian sehingga  $(a, c) \in R$ .
- (e) Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti  $R = \{(4, 5)\}$  selalu menghantar.

**Contoh 12.** Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif bersifat menghantar. Misalkan bahwa  $a$  habis membagi  $b$  dan  $b$  habis membagi  $c$ . Maka terdapat bilangan positif  $m$  dan  $n$  sedemikian sehingga  $b = ma$  dan  $c = nb$ . Di sini  $c = nma$ , sehingga  $a$  habis membagi  $c$ . Jadi, relasi “habis membagi” bersifat menghantar.

**Contoh 13.** Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif  $\mathbf{N}$ .

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 6, \quad T : 3x + y = 10$$

- $R$  adalah relasi menghantar karena jika  $x > y$  dan  $y > z$  maka  $x > z$ .
- $S$  tidak menghantar karena, misalkan  $(4, 2)$  dan  $(2, 4)$  adalah anggota  $S$  tetapi  $(4, 4) \notin S$ .
- $T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$  tidak menghantar.



- Relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya
- Tetapi, sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari  $a$  ke  $b$  dan dari  $b$  ke  $c$ , maka juga terdapat busur berarah dari  $a$  ke  $c$ .

### 3. Setangkup (*symmetric*) dan tolak setangkup (*antisymmetric*)

- Relasi  $R$  pada himpunan  $A$  disebut **setangkup** jika  $(a, b) \in R$ , maka  $(b, a) \in R$  untuk  $a, b \in A$ .
- Relasi  $R$  pada himpunan  $A$  tidak setangkup jika  $(a, b) \in R$  tetapi  $(b, a) \notin R$ .
- Relasi  $R$  pada himpunan  $A$  sedemikian sehingga  $(a, b) \in R$  dan  $(b, a) \in R$  hanya jika  $a = b$  untuk  $a, b \in A$  disebut **tolak-setangkup**.
- Relasi  $R$  pada himpunan  $A$  tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda  $a$  dan  $b$  sedemikian sehingga  $(a, b) \in R$  dan  $(b, a) \in R$ .

- Relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau  $m_{ij} = m_{ji} = 1$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  :

$$\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari  $a$  ke  $b$ , maka juga ada busur dari  $b$  ke  $a$ .

- Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika  $m_{ij} = 1$  dengan  $i \neq j$ , maka  $m_{ji} = 0$ . Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari  $m_{ij} = 0$  atau  $m_{ji} = 0$  bila  $i \neq j$  :

$$\begin{bmatrix} & 1 & & \\ 0 & & 0 & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

**Contoh 14.** Misalkan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , dan relasi  $R$  di bawah ini didefinisikan pada himpunan  $A$ , maka

- a) Relasi  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$  bersifat setangkup karena jika  $(a, b) \in R$  maka  $(b, a) \in R$ . Di sini  $(1, 2)$  dan  $(2, 1) \in R$ , begitu juga  $(2, 4)$  dan  $(4, 2) \in R$ .

SETANGKUP

tidak tolak setangkup karena ada elemen" yang setangkup

- b) Relasi  $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$  tidak setangkup karena  $(2, 3) \in R$ , tetapi  $(3, 2) \notin R$ .

SETANGKUP HRS SMUA ELEMEN

tidak tolak setangkup krn ada yg setangkup  
tp dia TIDAK SETANGKUP

tolak setangkup boleh kalau elemen lain tidak membentuk setangkup  
e.g.  $\{(1,1), (2,2), (3,4), (1,2)\}$

- c) Relasi  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$  tolak-setangkup karena  $1 = 1$  dan  $(1, 1) \in R$ ,  $2 = 2$  dan  $(2, 2) \in R$ , dan  $3 = 3$  dan  $(3, 3) \in R$ . Perhatikan bahwa  $R$  juga setangkup.

setangkup dan tolak setangkup

tidak refleksif, karena ada elemen dari  $a$  yang tidak ada yaitu  $\{4,4\}$

menghantar

- d) Relasi  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$  tolak-setangkup karena  $(1, 1) \in R$  dan  $1 = 1$ , begitu juga  $(2, 2) \in R$  dan  $2 = 2$  dan. Perhatikan bahwa  $R$  tidak setangkup karena  $(1, 2) \in R$ , tetapi  $(2, 1) \notin R$ , begitu juga  $(2, 3) \in R$ , tetapi  $(3, 2) \notin R$ ,

tolak setangkup

tidak menghantar

e) Relasi  $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$  tidak tolak-setangkup karena  $2 \neq 4$  tetapi  $(2, 4)$  dan  $(4, 2)$  anggota  $R$ . Relasi  $R$  pada (a) dan (b) di atas juga tidak tolak-setangkup.

tidak tolak setangkup, namun setangkup

tidak menghantar

f) Relasi  $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$  tidak setangkup dan tidak tolak-setangkup.  $R$  tidak setangkup karena  $(4, 2) \in R$  tetapi  $(2, 4) \notin R$ .  $R$  tidak tolak-setangkup karena  $(2, 3) \in R$  dan  $(3, 2) \in R$  tetapi  $2 \neq 3$ .

tidak refleksif karena tidak ada  $(3,3)$

tidak menghantar karena  $(4,2) (2,3)$  tp gada  $(4,3)$

tidak setangkup, tidak tolak setangkup

g) Relasi  $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$  tidak setangkup (mengapa?) tetapi  $R$  tolak-setangkup (mengapa?).

tidak refleksif karena gada  $(1,1), (2,2), (3,3)$

tidak setangkup

menghantar

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} =$  setangkup dan tolak setangkup

smua by default = tolak setangkup

**Contoh 15.** Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif tidak setangkup karena jika  $a$  habis membagi  $b$ ,  $b$  tidak habis membagi  $a$ , kecuali jika  $a = b$ .

Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu,  $(2, 4) \in R$  tetapi  $(4, 2) \notin R$  sehingga  $R$  tidak setangkup.

Relasi “habis membagi” pasti tolak-setangkup karena jika  $a$  habis membagi  $b$  dan  $b$  habis membagi  $a$  maka itu hanya jika  $a = b$ . Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu,  $(4, 4) \in R$  dan  $4 = 4$ .

- Perhatikan bahwa relasi yang “tidak setangkup” tidak selalu berarti sama dengan “tolak setangkup”.
- Contoh: Relasi  $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$  tidak setangkup dan juga tidak tolak-setangkup.  $R$  tidak setangkup karena  $(4, 2) \in R$  tetapi  $(2, 4) \notin R$ .  $R$  tidak tolak-setangkup karena  $(2, 3) \in R$  dan  $(3, 2) \in R$  tetapi  $2 \neq 3$ .

**Contoh 16.** Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \quad S : x + y = 6, \quad T : 3x + y = 10$$

- $R$  bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5.
- $S$  relasi setangkup karena, misalkan  $(4, 2)$  dan  $(2, 4)$  adalah anggota  $S$ .
- $T$  tidak setangkup karena, misalkan  $(3, 1)$  adalah anggota  $T$  tetapi  $(1, 3)$  bukan anggota  $T$ . tidak menghantar      tolak setangkup
- $S$  bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan  $(4, 2) \in S$  dan  $(2, 4) \in S$  tetapi  $4 \neq 2$ .
- Relasi  $R$  dan  $T$  keduanya tolak-setangkup (coba tunjukkan!).



**Contoh 16:** Tentukanlah apakah relasi  $R = \{(x,y) \mid x^3 = y, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$  bersifat refleksif/tidak, menghantar/tidak, setangkup/tidak, atau tolak setangkup/tidak?

Jawaban:

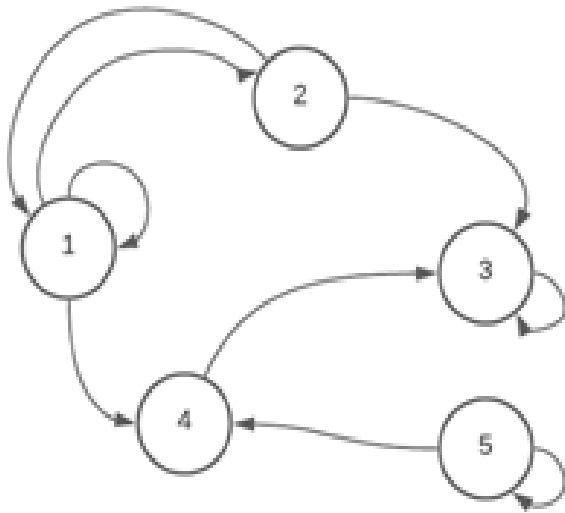
R tidak refleksif, karena tidak terdapat  $(2,2) \in R$ ,  $(3,3) \in R$ , dan seterusnya

R tidak menghantar, karena jika  $x^3 = y$ , lalu selanjutnya terdapat  $y^3 = z$ , maka tidak mungkin ada  $x^3 = z$

R tidak setangkup, karena misalnya  $(2,8) \in R$  namun  $(8,2) \notin R$

R tolak setangkup, karena jika  $x^3 = y$ , tidak ada  $y^3 = x$  kecuali untuk  $x = y$

**Contoh 17:** Berikut adalah graf yang merepresentasikan sebuah relasi R pada sebuah himpunan. Tentukan apakah relasi tersebut bersifat refleksif/tidak, menghantar/tidak, setangkup/tidak, dan tolak setangkup/tidak?



**Jawaban:**

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

- a. Refleksif? Tidak, karena  $(2, 2) \notin R$  dan  $(4, 4) \notin R$
- b. Menghantar? Tidak, karena  $(1, 4) \in R$  dan  $(4, 3) \in R$ , tetapi  $(1, 3) \notin R$
- c. Setangkup? Tidak, karena terdapat  $(2, 3) \in R$ , tetapi  $(3, 2) \notin R$
- d. Tolak-setangkup? Tidak, karena  $1 \neq 2$  tetapi  $(1, 2) \in R$  dan  $(2, 1) \in R$

**Contoh 18.** Tentukan sifat-sifat dari relasi R pada himpunan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  yang direpresentasikan dengan matriks  $M = [m_{ij}]$  seperti di bawah ini. Apakah R merupakan relasi refleksif, relasi menghantar, relasi setangkup, dan/atau relasi tolak setangkup? Jelaskan alasan untuk setiap sifat tersebut!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Jawaban:**

- R refleksif, karena setiap elemen diagonal utama matriks relasi R bernilai 1 atau  $m_{ii} = 1$  untuk setiap  $i \in A$ .
- R tidak menghantar, karena terdapat  $m_{14} = 1$  dan  $m_{42} = 1$ , namun  $m_{12} = 0$  atau dengan kata lain elemen  $(1,2)$  tidak terdapat dalam relasi R sehingga tidak memenuhi sifat menghantar pada  $(1,4)$  dan  $(4,2)$ .
- R tidak setangkup, karena terdapat elemen yang  $m_{ij} \neq m_{ji}$  yaitu pada  $m_{12} = 0$  tetapi  $m_{21} = 1$
- R tidak tolak setangkup, karena terdapat elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga  $(a, b) \in R$  dan  $(b, a) \in R$ , yaitu elemen  $m_{14} = m_{41} = 1$  padahal  $1 \neq 4$

# Latihan

1. Misalkan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  dan  $R$  relasi pada himpunan  $A$ , yaitu  $R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,4)\}$ . Tentukan apakah  $R$  refleksif/tidak, setangkup/tidak, tolak-setangkup/tidak, menghantar/tidak.
2. Misalkan  $A$  = himpunan mahasiswa dan  $R$  adalah relasi pada  $A$  sedemikian sehingga  $(a, b) \in R$  jika  $a$  satu angkatan dengan  $b$ . Tentukan apakah  $R$  refleksif/tidak, setangkup/tidak, tolak-setangkup/tidak, menghantar/tidak.
3. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat tidak negatif. Tentukan apakah masing-masing relasi dibawah ini memenuhi relasi menghantar atau tidak, jelaskan alasannya.
  - R:  $x$  lebih besar sama dengan  $y$
  - S:  $(x+y) \bmod 10 = 6$
  - T:  $3x + 2y = 6$