

IF2120 Matematika Diskrit

Aljabar Boolean (Bag.2) (Update 2023)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Penyederhanaan Fungsi Boolean

- Menyederhanakan fungsi Boolean artinya mencari bentuk fungsi lain yang ekuivalen tetapi dengan jumlah literal atau operasi yang lebih sedikit.
- Contoh: $f(x, y) = x'y + xy' + y'$ disederhanakan menjadi $f(x, y) = x' + y'$
- Dipandang dari segi aplikasi aljabar Boolean, fungsi Boolean yang lebih sederhana berarti rangkaian logikanya juga lebih sederhana (menggunakan jumlah gerbang logika lebih sedikit).

- Tiga metode yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boolean:
 1. Secara aljabar, menggunakan hukum-hukum aljabar Boolean.
 2. Metode Peta Karnaugh.
 3. Metode Quine-McCluskey (metode tabulasi)
- Yang dibahas hanyalah **Metode Peta Karnaugh**

Peta Karnaugh

- Peta Karnaugh (atau *K-map*) merupakan metode grafis untuk menyederhanakan fungsi Boolean.
- Metode ini ditemukan oleh Maurice Karnaugh pada tahun 1953. Peta Karnaugh adalah sebuah diagram/peta yang terbentuk dari kotak-kotak (berbentuk bujursangkar) yang bersisian.
- Tiap kotak merepresentasikan sebuah *minterm*.
- Tiap kotak dikatakan bertetangga jika *minterm-minterm* yang merepresentasikannya berbeda hanya 1 buah literal.



Maurice Karnaugh ([/'kɑ:rnɔ:/](#); October 4, 1924 – November 8, 2022) was an American physicist, mathematician, computer scientist, and inventor known for the [Karnaugh map](#) used in [Boolean algebra](#).
(Sumber: Wikipedia)

Peta Karnaugh dengan dua peubah

m_0	m_1
m_2	m_3

Penyajian 1

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

Penyajian 2

		y'	y
x'		$x'y'$	$x'y$
	x	xy'	xy

Penyajian 3

		y	
		0	1
x	0	00	01
	1	10	11

Penyajian 4

Peta Karnaugh dengan tiga peubah

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

		yz			
		00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Handwritten note: nabis 01 gaboleh 10 karena unit pembentuk mereka sama (0, 1) dan mereka gaboleh sebelahan.

Handwritten note: Kalau ganjil \rightarrow kolom > baris
 kolom = baris + 1

Kalo mis. variable = 5

	000	001	011	010	101	100	110	111
00	00000							
01	01000							
11	11000							
10	...							

Handwritten note: Lanjutin
 gampangin keluar
 5 peubah diujian

Peta Karnaugh dengan empat peubah

				yz				
				00	01	11	10	
m_0	m_1	m_3	m_2	$wx\ 00$	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
m_4	m_5	m_7	m_6	01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}	11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

Cara mengisi peta Karnaugh

- Kotak yang menyatakan *minterm* diisi “1”
- Sisanya diisi “0”

- Contoh: $f(x, y, z) = \overset{\text{min}}{x'y'z'} + \overset{010}{xyz'} + \overset{110}{xyz} + \overset{111}{xyz}$

		<i>yz</i>			
		00	01	11	10
<i>x</i>	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	1

Contoh: $f(x, y, z) = xz' + y$

xz' : Irisan antara:

$x \rightarrow$ semua kotak pada baris ke-2

$z' \rightarrow$ semua kotak pada kolom ke-1 dan kolom ke-4

y :

$y \rightarrow$ semua kotak pada kolom ke-3 dan kolom ke-4

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	1
	1	1	0	1	1

$xz' + y$

Pengisian peta Karnaugh dari tabel kebenaran

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tinjau hanya nilai fungsi yang memberikan 1. Fungsi Boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran adalah $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz$.

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	1	0	0
	1	1	1	1	0

Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

- Penggunaan Peta Karnaugh dalam penyederhanaan fungsi Boolean dilakukan dengan cara menggabungkan kotak-kotak yang bernilai 1 dan saling bersisian.
- Kelompok kotak yang bernilai 1 dapat membentuk:
 - pasangan (dua),
 - kuad (empat),
 - oktet (delapan).

Pasangan

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned}f(w, x, y, z) &= wxyz + wxyz' \\&= wxy(z + z') \\&= wxy(1) \\&= wxy\end{aligned}$$

x (

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxyz + wxyz'$

Sesudah disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy$

Kuad (1)

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Bukti secara aljabar (kuad = 2 buah pasangan):

$$\begin{aligned}
 f(w, x, y, z) &= wxy' + wxy \\
 &= wx(z' + z) \\
 &= wx(1) \\
 &= wx
 \end{aligned}$$

Sebelum: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz'$

Sesudah: $f(w, x, y, z) = wx$

*(any sm sj
yok pp+ 3)*

Kuad (2)

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	0	0
	10	1	1	0	0

Sebelum: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wx'y'z' + wx'y'z$

Sesudah: $f(w, x, y, z) = wy'$

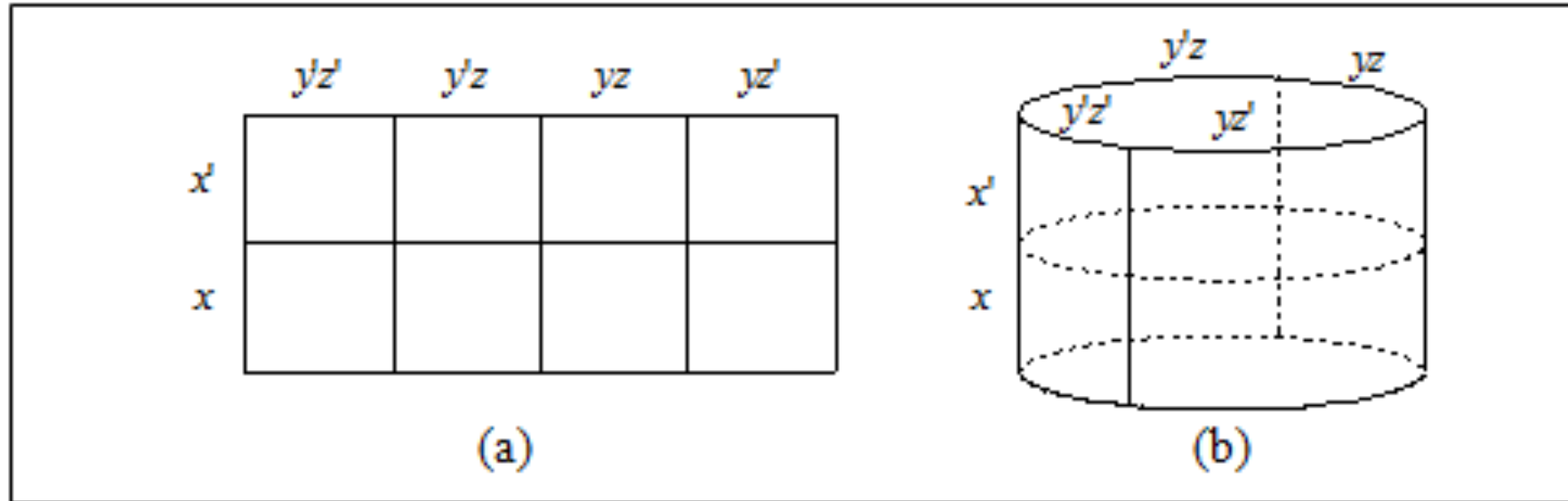
Oktet

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Sebelum: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz' + wxyz + w'x'y'z' + w'x'y'z + w'x'yz + w'x'yz'$

Sesudah: $f(w, x, y, z) = w$

Penggulungan (1)



Gambar (a) Peta Karnaugh "normal" dengan 3 peubah

(b) Peta Karnaugh dengan sisi kiri dan sisi kanan ditautkan (seperti digulung).

Penggulungan (2)

Contoh: Sederhanakan $f(x, y, z) = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$.

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	1	0	1	1

Sebelum: $f(x, y, z) = \cancel{x'yz} + \cancel{xy'z'} + \cancel{xyz} + \cancel{xyz'}$

Sesudah: $f(x, y, z) = yz + xz'$

Ketidakunikan Hasil Penyederhanaan

Hasil penyederhanaan dengan peta Karnaugh tidak selalu unik.
Artinya, mungkin terdapat beberapa bentuk fungsi minimasi yang berbeda meskipun jumlah literal dan jumlah *term*-nya sama

Kemungkinan pengelompokan I:

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	0
11	1	0	1	1
10	1	1	1	0

$$f(w,x,y,z) = w'x'y + w'xy'z + wxy + wy'z' + wx'z$$

Kemungkinan pengelompokan II:

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	0
11	1	0	1	1
10	1	1	1	0

$$f(w,x,y,z) = w'x'y + w'xy'z + wxz' + wyz + wx'y'$$

Tips menyederhanakan dengan Peta Karnaugh

- Kelompokkan 1 yang bertetangga sebanyak mungkin
- Dimulai dengan mencari oktet sebanyak-banyaknya terlebih dahulu, kemudian kuad, dan terakhir pasangan.

Contoh minimisasi 1:

$$\begin{aligned}
 &w'x'y'z + w'x'yz + w'x'y'z' \\
 &w'xy'z' + wxy'z' + wxy'z + \\
 &wx'yz' + wx'yz + \\
 &wx'yz' + wx'yz'
 \end{aligned}$$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	1	1	1
	01	0	0	0	1
	11	1	1	0	1
	10	1	1	0	1

$$\begin{aligned}
 &yz' \\
 &w'x'z \\
 &wy'
 \end{aligned}$$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wy' + yz' + w'x'z$

Contoh minimisasi 2:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	1
	11	0	1	1	1
	10	1	1	1	0

1000 1000

000
 010
 110
 100
 001
 011
 111
 101

000
 010
 001
 011
 110
 100
 111
 101

x
 y
 xy
 $w'z$
 z

$wx'y' + xy + z \rightarrow xy + w'z$
 $wx'y' + xy + \underline{w'z} + \underline{z}$ *benar*
 $wx'y' + xy + z$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = z + xy + wx'y'$

Contoh minimisasi 3:

$wx \backslash yz$					
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	0
01	0	0		1	0
11	1	1	1	1	1
10	0		1	1	1

wx
 wz
 xyz
 wy
 $wx + wz + xyz + wy$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wx + wz + wy + xyz$

Contoh minimisasi 4:

Tentukan bentuk sederhana dari fungsi Boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran berikut dalam bentuk baku SOP dan bentuk baku POS.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

SOP
001 $x'z$
011 $+$
100 xz'
110
POS
000 $\rightarrow x+z$
010 \rightarrow ~~kalir~~
101 $\rightarrow x'+z'$
111

Penyelesaian:

(a) Bentuk baku SOP: kelompokkan 1

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Fungsi minimasi: $f(x, y, z) = x'z + xz'$

(b) Bentuk baku POS: kelompokkan 0

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Fungsi minimasi: $f(x, y, z) = (x' + z')(x + z)$

Contoh minimisasi 5:

Minimisasi fungsi Boolean $f(x, y, z) = \Sigma (0, 2, 4, 5, 6)$

Penyelesaian:

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

		yz			
		00	01	11	10
x	0	1	0	0	1
	1	1	1	0	1

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = z' + xy'$ |

Contoh minimisasi 6

Minimisasi $f(w, x, y, z) = w'x'y' + x'yz' + w'xyz' + wx'y'$

Penyelesaian:

$wx \backslash yz$					
		00	01	11	10
00	1	1	0	1	
01	0	0	0	1	
11	0	0	0	0	
10	1	1	0	1	

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = x'y' + x'z' + w'yz'$

Contoh minimisasi 7

Minimisasi fungsi Boolean $f(w, x, y, z) = \Sigma (0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$

Penyelesaian:

$\begin{array}{c} yz \\ \swarrow \searrow \end{array}$		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	1
	11	1	1	0	1
	10	1	1	0	0

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = y' + w'z' + xz'$

Contoh minimisasi 8

Sederhanakan fungsi $f(w,x,y,z) = (w + x')(w + x + y)(w' + x' + y')(w' + x + y + z')$.
Hasil penyederhanaan dalam bentuk baku SOP dan POS.

Penyelesaian:

wx	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	1	1

Hasil penyederhanaan

SOP: $f(w, x, y, z) = x'y + wxy' + wy'z'$ (garis penuh)

POS: $f(w, x, y, z) = (x' + y')(w + y)(x + y + z')$ (garis putus-putus)

Contoh minimisasi 9

Sederhanakan fungsi $f(x, y, z, t) = xy' + xyz + x'y'z' + x'yz't'$

Penyelesaian:

Pengelompokan yang berlebihan

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

Pengelompokan yang benar

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

Fungsi minimasi: $f(x, y, z, t) = y'z' + xz + yzt'$

Contoh minimisasi 10

Minimasi fungsi yang telah dipetakan ke peta Karnaugh di bawah ini dalam bentuk baku SOP dan bentuk baku POS.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	1	0
	01	1	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

Penyelesaian:

$$\text{SOP : } f(w, x, y, z) = yz + wz + xz + w'xy'$$

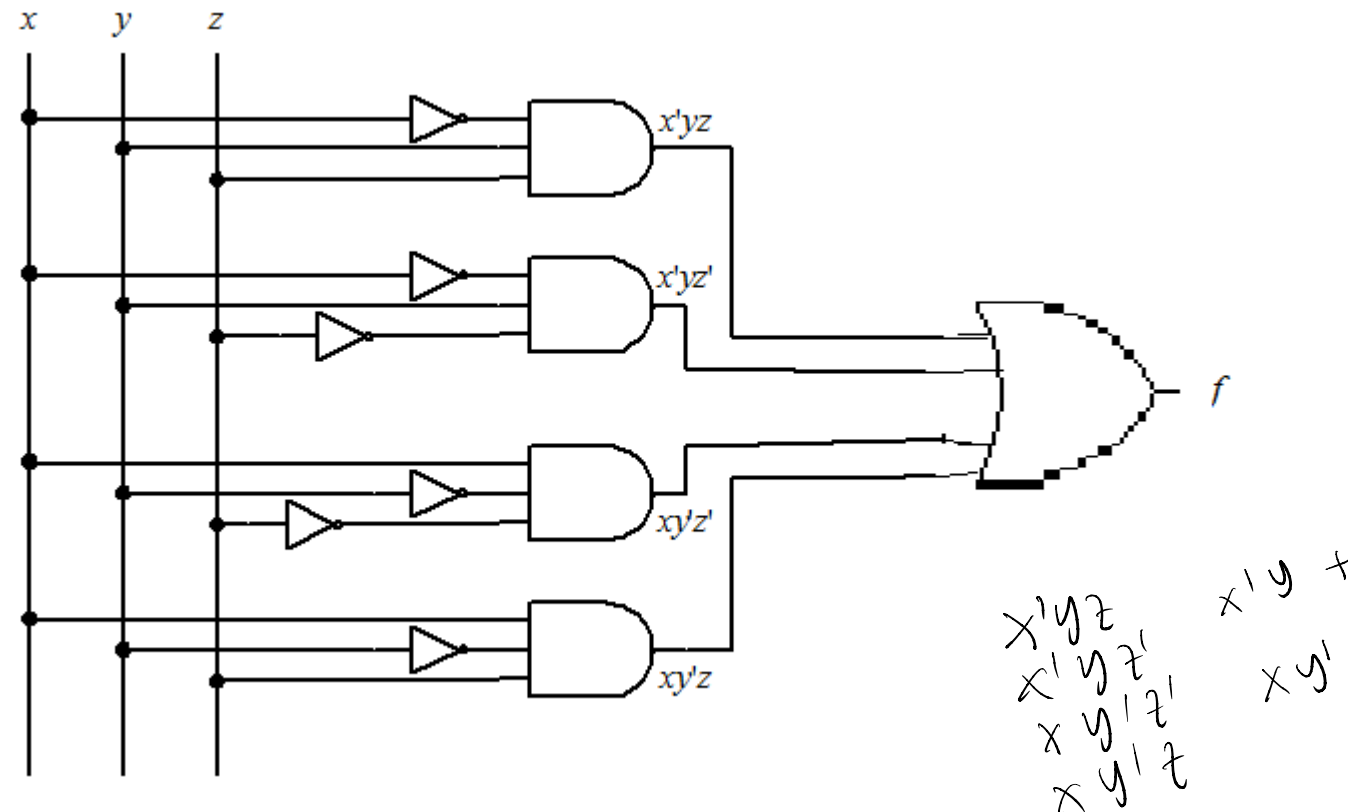
(garis penuh)

$$\text{POS: } f(w, x, y, z) = (y' + z)(w' + z)(x + z)(w + x + y)$$

(garis putus-putus)

Contoh minimisasi 11

Sederhanakan rangkaian logika berikut:



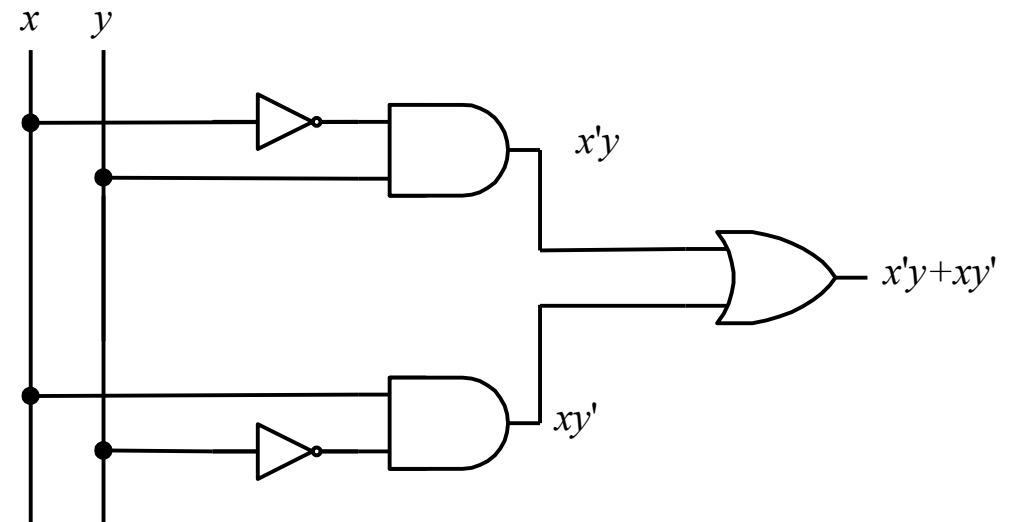
Penyelesaian: Fungsi yang berkoresponden dengan rangkaian logika tsb:
 $f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Rangkaian logika hasil penyederhanaan:

Fungsi Boolean hasil minimisasi:

$$f(x, y, z) = \underline{x'y + xy'}$$



Peta Karnaugh untuk Lima Peubah

	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}



Garis pencerminan

Dua kotak dianggap bertetangga jika secara fisik berdekatan
dan merupakan pencerminan terhadap garis ganda

Contoh: Carilah fungsi sederhana dari

$$f(v, w, x, y, z) = \Sigma (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$$

Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

$\begin{array}{c} xyz \\ vw \end{array}$		xyz							
		000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	1	0	0	1	
01	0	1	1	0	0	1	1	0	
11	0	1	1	0	0	1	1	0	
10	0	1	0	0	0	0	1	0	

Fungsi minimasi: $f(v, w, x, y, z) = wz + v'w'z' + vy'z$

Keadaan *don't care*

- Keadaan *don't care* adalah kondisi nilai peubah yang tidak diperhitungkan oleh fungsinya.
- Artinya nilai 1 atau 0 dari peubah *don't care* tidak berpengaruh pada hasil fungsi tersebut.
- Contoh:
 - Peraga digital angka desimal 0 sampai 9.
 - Jumlah bit yang diperlukan untuk merepresentasikan angka 0 sampai 9 = 4 bit.
 - Sehingga, bit-bit untuk angka 10-15 tidak terpakai

w	x	y	z	Desimal
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

} don't care

- Dalam menyederhanakan Peta Karnaugh yang mengandung keadaan *don't care*, ada dua hal penting sebagai pegangan.
- Pertama, kita anggap semua nilai *don't care* (X) sama dengan 1 dan kemudian membentuk kelompok sebesar mungkin yang melibatkan angka 1 termasuk tanda X tersebut.
- Kedua, semua nilai X yang tidak termasuk dalam kelompok tersebut kita anggap bernilai 0.
- Dengan cara ini, keadaan-keadaan X telah dimanfaatkan semaksimal mungkin, dan kita boleh melakukannya secara bebas.

Contoh: Sebuah fungsi Boolean, f , dinyatakan dengan tabel berikut. Minimisasi fungsi f sesederhana mungkin.

w	x	y	z	$f(w, x, y, z)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	X
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

don't care

Penyelesaian:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	0	1	0
	01	1	1	1	0
	11	X	X	X	X
	10	X	X	X	X

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = xz + y'z' + yz$

Contoh: Minimisasi fungsi Boolean berikut (dalam bentuk baku SOP dan bentuk baku POS): $f(w, x, y, z) = \Sigma (1, 3, 7, 11, 15)$

dengan kondisi *don't care* adalah $d(w, x, y, z) = \Sigma (0, 2, 5)$.

Penyelesaian:

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

Hasil penyederhanaan:

SOP: $f(w, x, y, z) = yz + w'z$

(kelompok garis penuh)

POS: $f(w, x, y, z) = z (w' + y)$

(kelompok garis putus-putus)

Latihan (UTS 2022)

Diberikan dua buah fungsi Boolean f dan g . Maka, fungsi $h = f + g$ diperoleh dengan meng-OR-kan f dan g :

$$f = wxy' + y'z + w'yz' + x'yz'$$

$$g = (w + x + y' + z')(x' + y' + z)(w' + y + z')$$

Dengan menggunakan peta Karnaugh, temukan bentuk yang paling sederhana dari $h = f+g$. Gambarkan juga rangkaian logika hasil akhirnya.

Jawaban:

Tabel Kebenaran

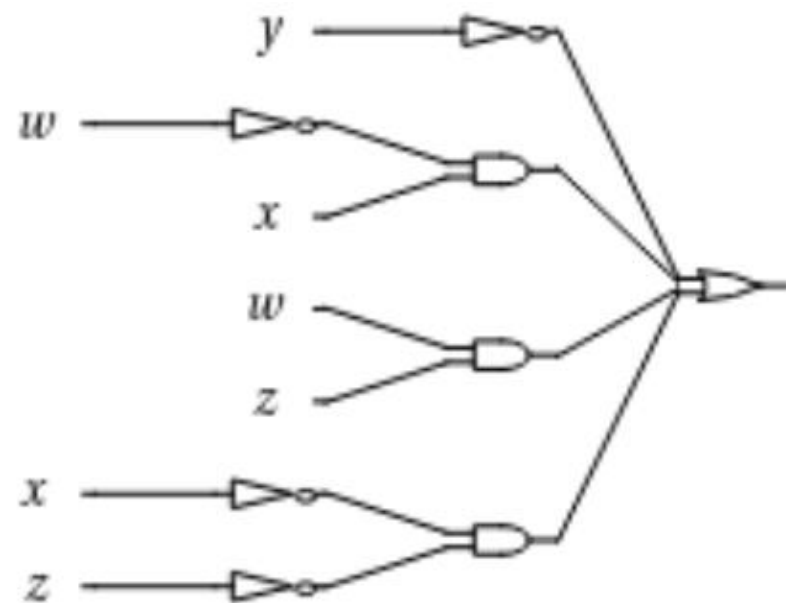
w	x	y	z	f	g	h = (f OR g)
1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Peta Karnaugh:

	<u>y'z'</u>	<u>y'z</u>	<u>yz</u>	<u>yz'</u>
<u>w'x'</u>	1	1	0	1
<u>w'x</u>	1	1	1	1
<u>wx</u>	1	1	1	0
<u>wx'</u>	1	1	1	1

Hasil penyederhanaan:

$$h(w, x, y, z) = y' + w'x + wz + x'z'$$



Bersambung ke Bagian 3