Seri bahan kuliah Algeo #7 - 2023

Aplikasi Metode Eliminasi Gauss di dalam Metode Numerik

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Apa itu Metode Numerik?

- Numerik: segala sesuatu yang berkaitan dengan angka
- Metode: cara yang sistematis untuk menyelesaikan suatu persoalan guna mencapai tujuan yang ditentukan

- Metode numerik: cara yang sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi aritmetika (+, -, *, /) pada angka

- Dua cara penyelesaian persoalan matematika:

  1. Secara analitik → solusinya eksak (tepat)
  2. Secara numerik → solusinya berupa hampiran (aproksimasi)

- *Secara analitik*: menggunakan rumus dan teorema yang sudah baku di dalam matematika → metode analitik

- *Secara numerik*: menggunakan pendekatan aproksimasi untuk mencari solusi hanya dengan operasi aritmetika biasa → metode numerik.

- Contoh: Menghitung integral $\int_{-1}^{1}(4-x^2)dx$

Metode analitik:

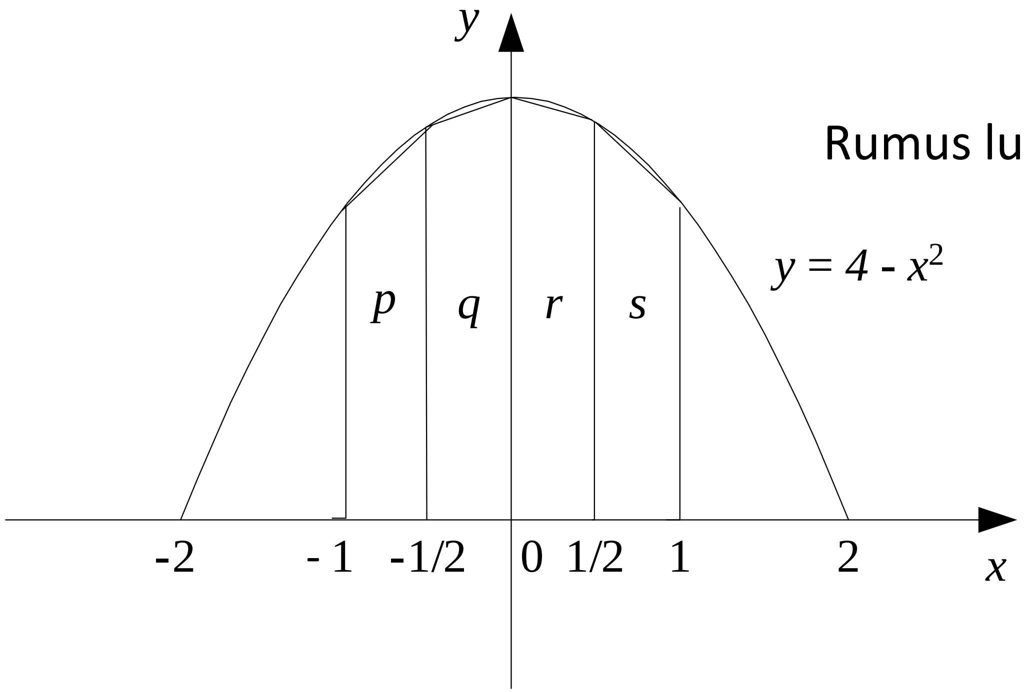
Rumus: $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + C$

$$\int_{-1}^{1}(4-x^2)dx = [4x - \frac{1}{3}x^3]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= [4(1) - \frac{1}{3}(1)] - [4(-1) - \frac{1}{3}(-1)] = 22/3 = 7.33$$

- *Metode numerik*

Nilai integral = luas daerah di bawah kurva



Rumus luas trapesium = (jumlah sisi sejajar x tinggi)/2

$$\int_{-1}^{1}(4-x^2)dx \approx p + q + r + s \approx \{[f(-1) + f(-1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(-1/2) + f(0)] \times 0.5/2\} + \{[f(0) + f(1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(1/2) + f(1)] \times 0.5/2\}$$

$$\approx 0.5/2\ \{f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\}$$

$$\approx 0.5/2\ \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\}$$

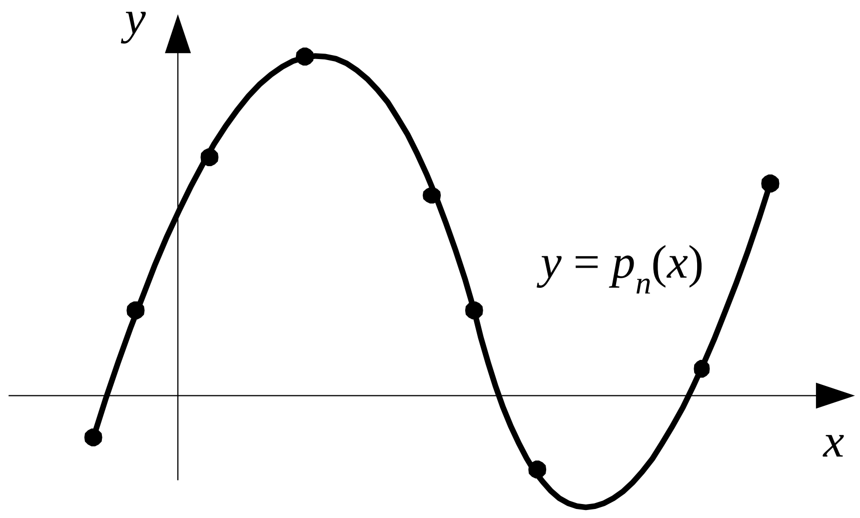
$$\approx 7.25$$

- Solusi dengan metode numerik adalah solusi hampiran (aproksimasi)
- Hampiran terhadap solusi eksak
- Oleh karena itu, solusi numerik mengandung galat.
- **Galat** (ε): perbedaan antara solusi eksak dengan solusi hampiran.
- Definisi: $\varepsilon = a - \hat{a}$
- Salah satu sumber galat adalah galat pembulatan (*rounding error*).

Interpolasi

- Salah satu persoalan di dalam metode numerik adalah **interpolasi**
- **Persoalan interpolasi**: Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Tentukan persamaan polinom $p_n(x)$ yang melalui semua titik-titik tersebut sedemikian sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, maka $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y pada $x = a$, yaitu $y = p_n(a)$.

Contoh persoalan interpolasi dalam bidang fisika:

Sebuah pengukuran fisika telah dilakukan untuk menentukan hubungan antara tegangan yang diberikan kepada baja tahan-karat dan waktu yang diperlukan hingga baja tersebut patah. Delapan nilai tegangan yang berbeda dicobakan, dan data yang dihasilkan adalah [CHA91]:

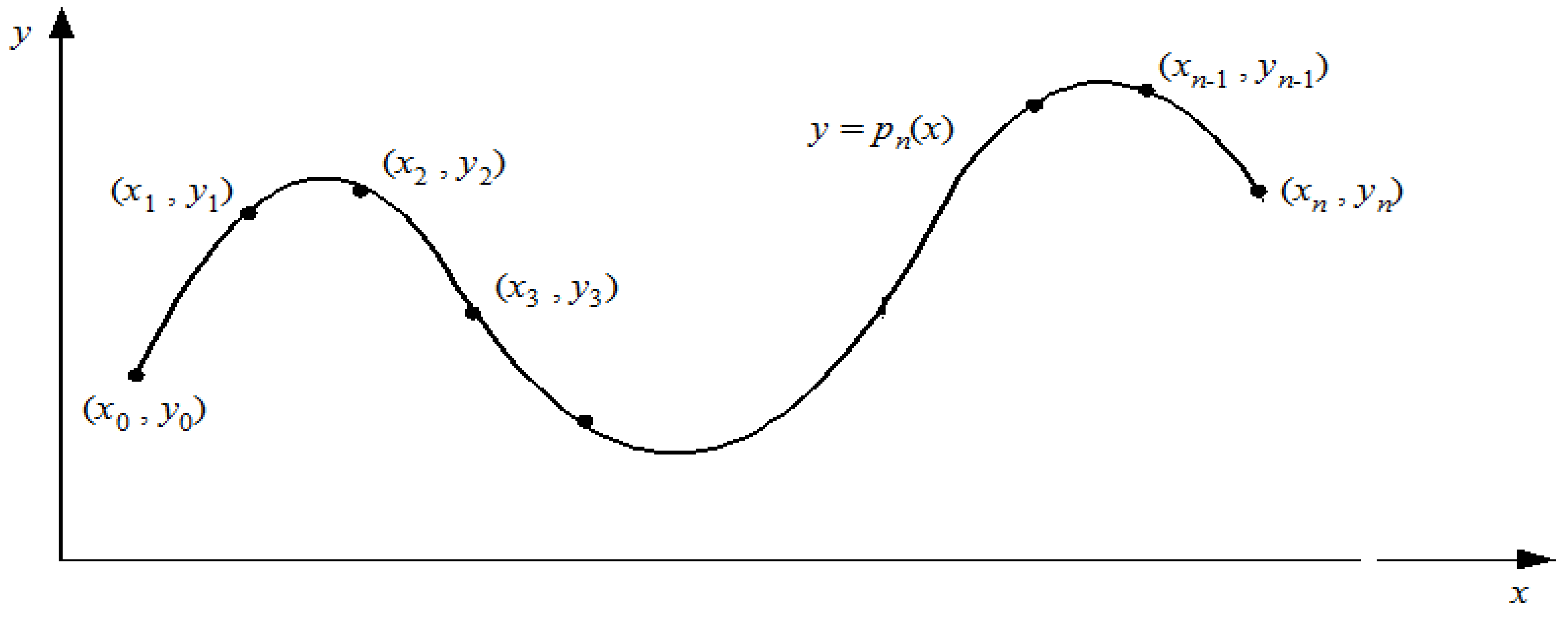
Tegangan yang diterapkan, x, kg/mm^2	5	10	15	20	25	30	35	40
Waktu patah, y, jam	40	30	25	40	18	20	22	15

Persoalan: Berapa waktu patah y jika tegangan x yang diberikan kepada baja adalah 12 kg/mm^2.

Fungsi y terhadap x tidak diketahui, namun kita dapat mengestimasi nilai y dengan metode interpolasi

- Polinom interpolasi derajat n yang melalui titik-titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ adalah

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$



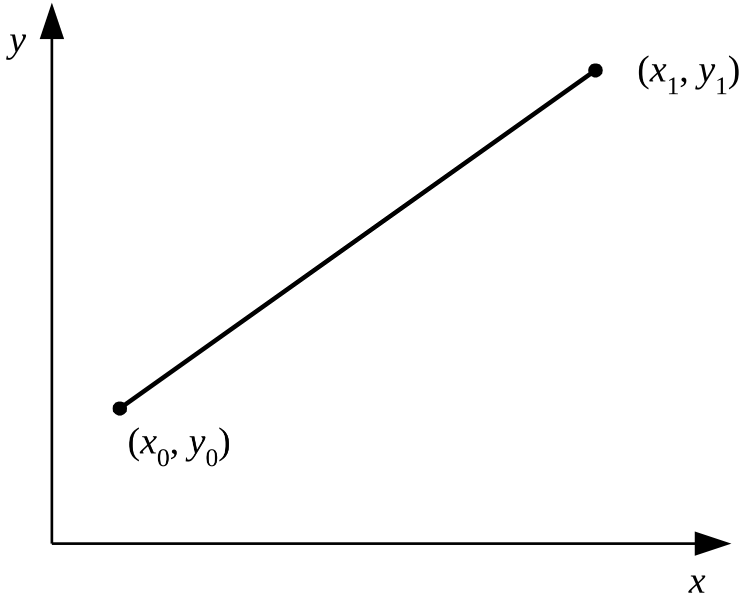
1. Interpolasi Linier

- Interpolasi linier adalah menginterpolasi dua buah titik dengan sebuah persamaan garis lurus.

2 titik = pangkat 1

- Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x \quad \rightarrow \text{persamaan garis lurus}$$



Sulihkan (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) ke dalam $p_1(x)$:

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

Pecahkan SPL ini dengan metode eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan untuk memperoleh nilai a_0 dan a_1

Contoh 1: Perkirakanlah jumlah penduduk Amerika Serikat pada tahun 1968 berdasarkan data tabulasi berikut:

Tahun	1960	1970
Jumlah penduduk (juta)	179.3	203.2

Jawaban:

Persamaan polinom derajat 1: $p_1(x) = a_0 + a_1x$

x = 1960 $\rightarrow$ y = 179.3 $\rightarrow$ 179.3 = a_0 + 1960a_1

x = 1970 $\rightarrow$ y = 203.2 $\rightarrow$ 203.2 = a_0 + 1970a_1

SPL

Solusi SPL tersebut adalah: $a_0 = -4505.1$ dan $a_1 = 2.39$

Persamaan polinom interpolasi (garis lurus): $p_1(x) = -4505.1 + 2.39x$

Estimasi penduduk AS pada tahun 1968 adalah:

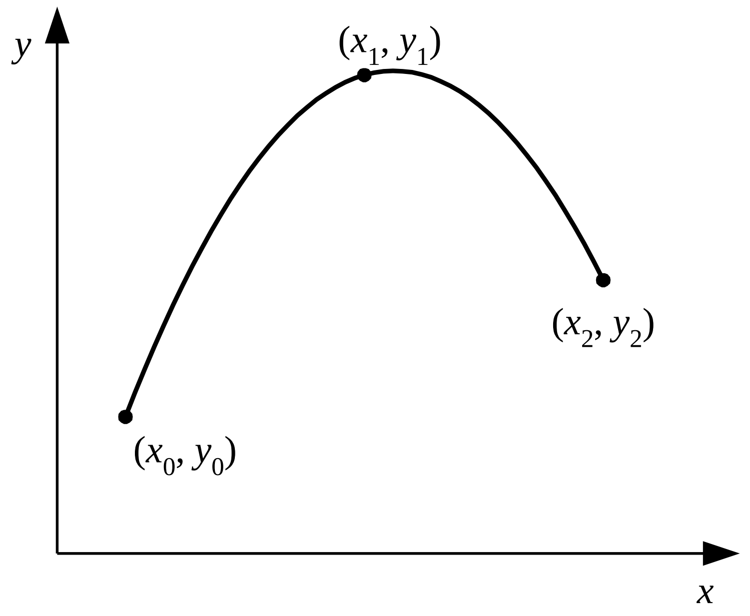
$$p_1(1968) = -4505.1 + (2.39)(1968) = 198.42 \text{ juta}$$

2. Interpolasi Kuadrat

- Misal diberikan tiga buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2).
- Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk parabola



- Polinom $p_2(x)$ ditentukan dengan cara berikut:

1) Sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan $p_2(x)$, $i = 0, 1, 2$. Dari sini diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0, a_1, dan a_2:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

2) hitung a_0, a_1, a_2 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

Contoh 2: Diberikan titik (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadrat yang menginterpolasi ketiga titik tersebut lalu estimasi nilai fungsi di x = 9.2.

Jawaban:

Sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$

$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$

$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan

$a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_3 = -0.0064$.

Polinom kuadratnya adalah

$$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$$

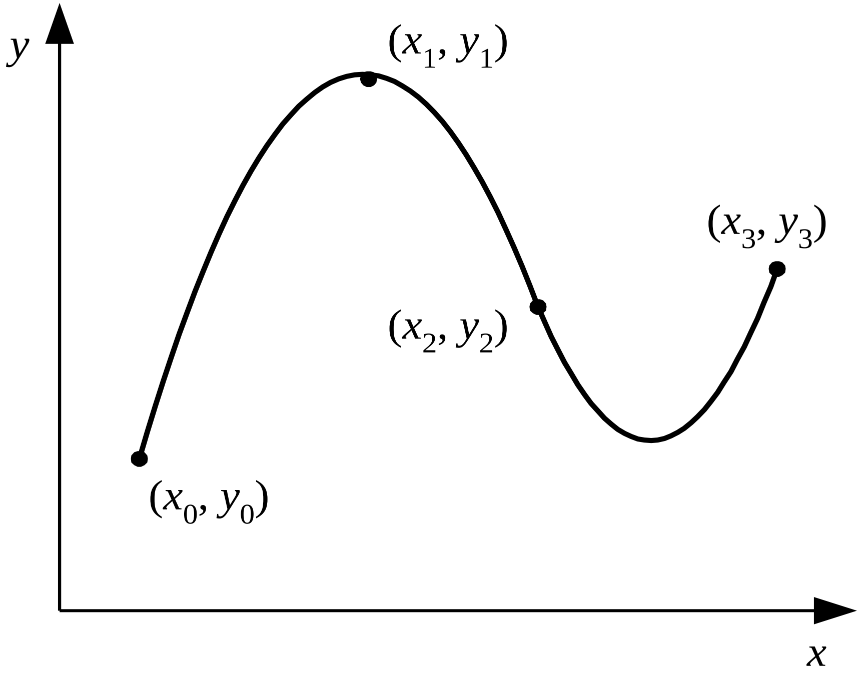
sehingga

$p_2(9.2) = 2.2192$

3. Interpolasi Kubik

- Misal diberikan empat buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3).
- Polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



- Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara berikut:
  1) sulihkan (x_i,y_i) ke dalam persamaan (P.5.9) , i = 0, 1, 2, 3. Dari sini diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$
$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

  2) hitung a_0, a_1, a_2, dan a_3 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

- Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat *n*:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

asalkan tersedia (n+1) buah titik data (x_i, y_i).

- Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom di atas $y = p_n(x)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n + 1 buah persamaan lanjar dalam a_0, a_1, a_2, …, a_n,

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0 \\
&a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1 \\
&a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_2^n = y_2 \\
&\ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
&a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n
\end{aligned}$$

- Solusi sistem persamaan lanjar ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari.