

Seri bahan kuliah Algeo #24

Aljabar Kompleks

Update 2023

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

2023

Sumber:

1. John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007
2. Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Bilangan Kompleks

- Bilangan kompleks berbentuk:

$$z = a + bi,$$

a adalah bagian riil $\rightarrow \text{Re}(z) = a$

b adalah bagian imajiner $\rightarrow \text{Im}(z) = b$

$$i = \sqrt{-1} \quad (\text{sehingga } i^2 = -1)$$

Contoh: $z = 3 + 2i$, $z = 6 - 14i$, $z = 16 - 13i$, dsb

modulus $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

contoh: $z = 3 - 4i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

: 5

- Simbol $i = \sqrt{-1}$ diperkenalkan oleh matematikawan Jerman, Leonhard Euler, pada tahun 1777
- Bagian riil (a) atau bagian imajiner (b) mungkin saja bernilai nol
- Jika $b = 0$, maka $z = a$ (bilangan riil), jika $a = 0$, maka $z = bi$ (bilangan kompleks).
- Ini berarti himpunan bilangan riil \mathbf{R} adalah himpunan bagian (*subset*) dari himpunan bilangan kompleks \mathbf{C} , yang dalam hal ini bagian imajinernya adalah nol.

- Konyugasi (*conjugate*) suatu bilangan kompleks sering dinamakan bilangan sekawan, ditulis sebagai z^* atau \bar{z}

$$z^* = a - bi$$

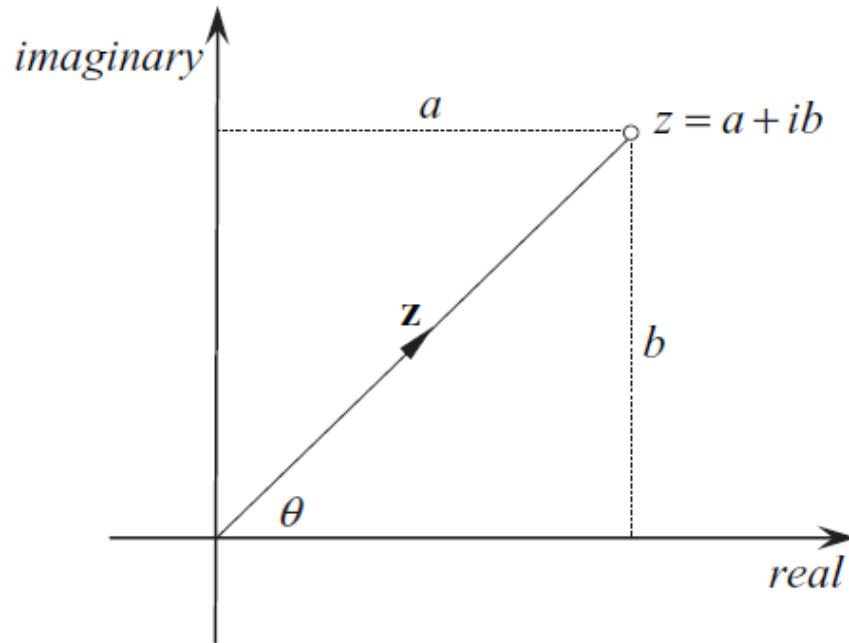
Contoh: $z = 3 + 2i$, maka $z^* = 3 - 2i$

$z = 5 - 3i$, maka $z^* = 5 + 3i$

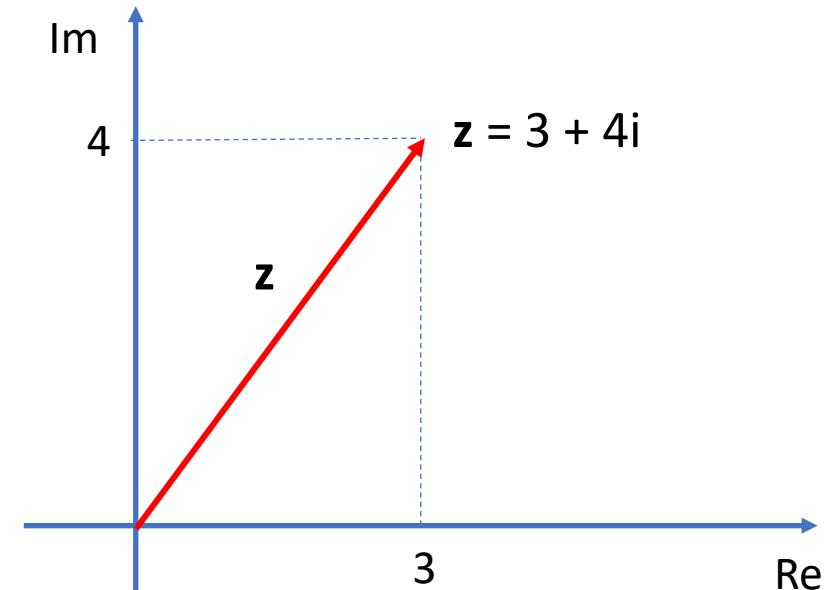
- i bersifat komutatif dengan skalar, jadi menuliskan ia atau ai adalah sama.
- Perhatikan pola sbb:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i \dots$$

- Diagram Argand menyajikan $z = a + bi$ sebagai vektor:



Contoh:



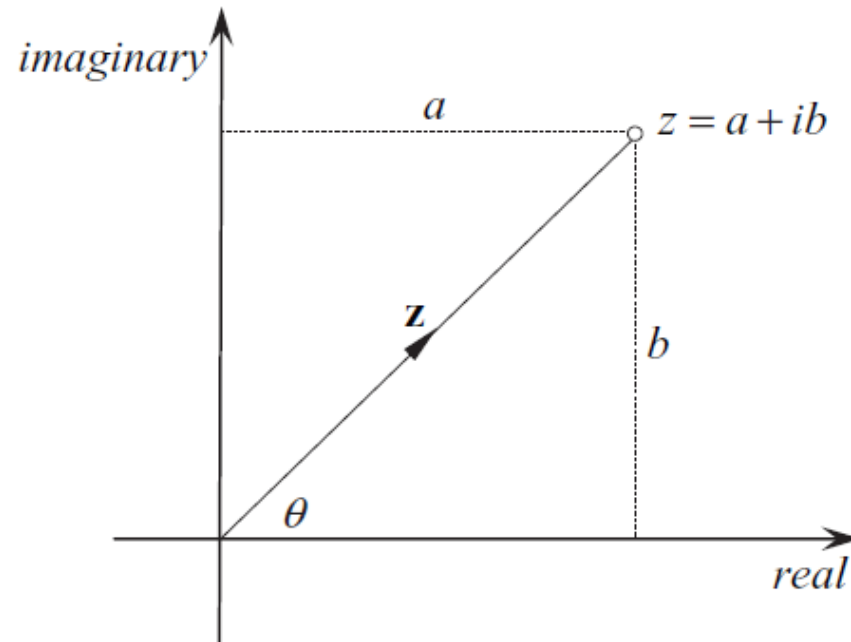
- Panjang z disebut modulus bilangan kompleks, dilambangkan dengan $|z|$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

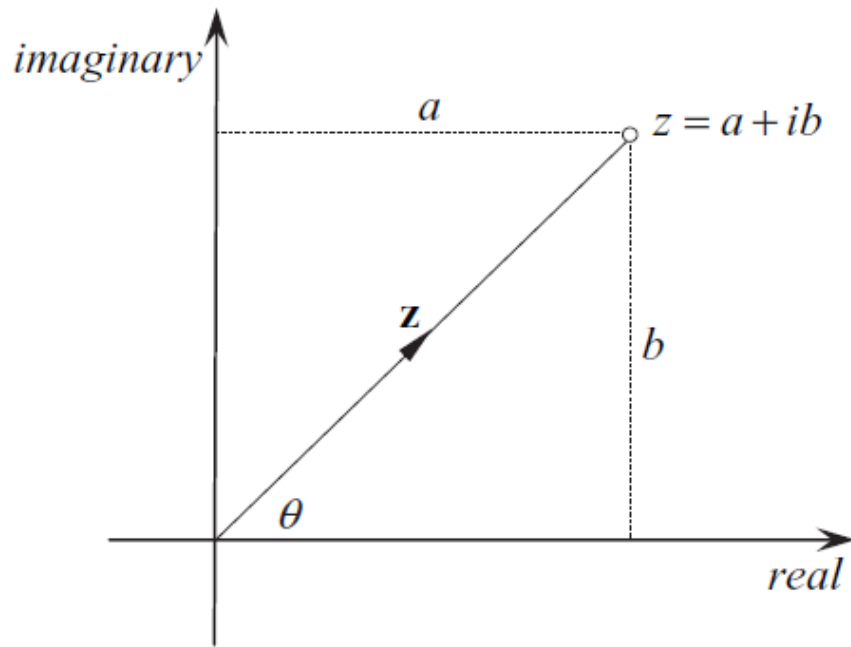
- Sudut θ yang dibentuk sumbu mendatar dengan vektor dihitung dengan:

$$\theta = \tan^{-1} (b/a)$$



- Sudut yang dibentuk sumbu mendatar dengan vektor adalah θ .
- Untuk kuadran 1 dan 4, $a > 0$, maka
$$\theta = \tan^{-1} (b/a)$$
- Untuk kuadran 2 dan 3, $a < 0$, maka
$$\theta = 180^\circ + \tan^{-1} (b/a)$$

- Perhatikan kembali gambar ini:



$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \rightarrow a = |z| \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \rightarrow b = |z| \sin(\theta)$$

- Jadi, $z = a + bi = |z| \cos(\theta) + i |z| \sin(\theta) = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
- Misalkan $|z| = r$, maka $z = a + bi = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \rightarrow z$ dalam bentuk polar

Operasi aritmetika bilangan kompleks

- Penjumlahan dua bilangan kompleks:

$$z_1 = a_1 + b_1i$$

$$z_2 = a_2 + b_2i \quad +$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- **Contoh 1:** $(4 + 3i) + (2 - 5i) = 6 - 2i$.

- Perkalian dua bilangan kompleks:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 \quad (\text{karena } i^2 = -1) \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

- **Contoh 2:** $(2 + 3i)(4 - 5i) = ((2)(4) - (3)(-5)) + ((2)(-5) + (3)(4))i = 23 + 2i$

- Perkalian bilangan kompleks dengan sekawannya: $zz^* = |z|^2$

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z^* &= a - bi \\ zz^* &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

- Pembagian bilangan kompleks:

Misalkan $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$

maka

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + i \left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \end{aligned}$$

- **Contoh 3:**

$$\begin{aligned}\frac{(4 + i2)}{(3 + i2)} &= \frac{(4 + i2)}{(3 + i2)} \cdot \frac{(3 - i2)}{(3 - i2)} \\ &= \frac{16 - i2}{9 + 4} \\ &= \left(\frac{16}{13}\right) - i \left(\frac{2}{13}\right).\end{aligned}$$

- Ketiga contoh operasi aritmetika di atas memperlihatkan bahwa operasi penjumlahan, perkalian, dan pembagian bilangan kompleks selalu menghasilkan bilangan kompleks juga (sifat *closure* atau ketertutupan).

- Perkalian bilangan kompleks dengan bilangan kompleks sekawan lainnya:

Misalkan

$$z_1 = a_1 + ib_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2$$

dan

$$z_2^* = a_2 - ib_2$$

maka

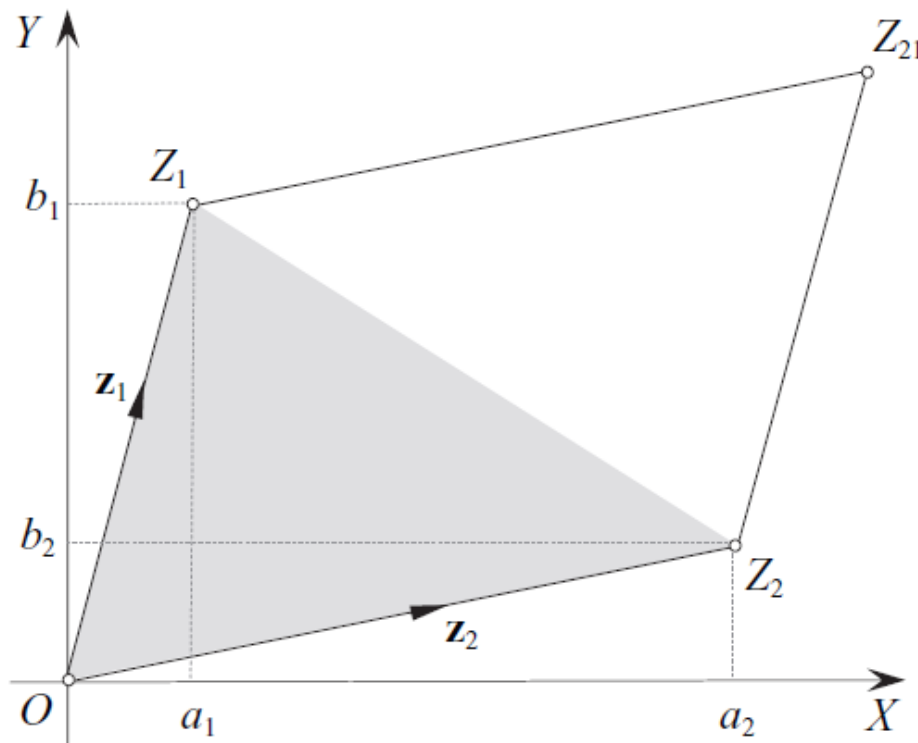
$$\begin{aligned} z_1 z_2^* &= (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $(a_2 b_1 - a_1 b_2)$ adalah perkalian titik (*dot product*) dua buah vektor, sedangkan bagian imajiner, $(a_2 b_1 - a_1 b_2)$, adalah bentuk determinan:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

- Ingatlah kembali tafsiran determinan di dalam aljabar vektor, yaitu nilai mutlak determinan menyatakan luas area parallelogram yang dibentuk oleh dua buah vektor.

- Area parallelogram dibentuk oleh vektor z_1 dan z_2 : $z_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ $z_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$



Paralelogram = area $OZ_2Z_{21}Z_1$

Luas area $OZ_2Z_{21}Z_1 = |a_2b_1 - a_1b_2|$

Luas segitiga $OZ_1Z_2 = \frac{1}{2}$ Luas area $OZ_2Z_{21}Z_1$

Aksioma-aksioma bilangan kompleks

Diberikan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, maka aksioma-aksioma berikut berlaku:

Closure

For all z_1 and z_2

$$\text{addition} \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{multiplication} \quad z_1 z_2 \in \mathbb{C}.$$

Identity

For each z there is an identity element 0 and 1 such that:

$$\text{addition} \quad z + 0 = 0 + z = z \quad (0 = 0 + 0i)$$

$$\text{multiplication} \quad z(1) = (1)z = z \quad (1 = 1 + 0i).$$

Inverse

For each z there is an inverse element $-z$ and $1/z$ such that:

$$\text{addition} \quad z + (-z) = -z + z = 0$$

$$\text{multiplication} \quad z \left(\frac{1}{z} \right) = \left(\frac{1}{z} \right) z = 1 \quad (z \neq 0).$$

Associativity

For all z_1, z_2 and z_3

$$\text{addition} \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$\text{multiplication} \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$$

Commutativity

For all z_1 and z_2

$$\text{addition} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$\text{multiplication} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

Distributivity

For all z_1, z_2 and z_3

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

→ buat rotasi

Fungsi i sebagai rotor

- Rotor: sumbu putaran
- i memiliki tafsiran geometri sebagai rotor
- Jika $a + bi$ dikalikan dengan i , maka hasilnya:

$$i(a + bi) = ai + bi^2 = ai + b(-1) = -b + ai$$

- Jika $-b + ai$ dikalikan lagi dengan i , maka:

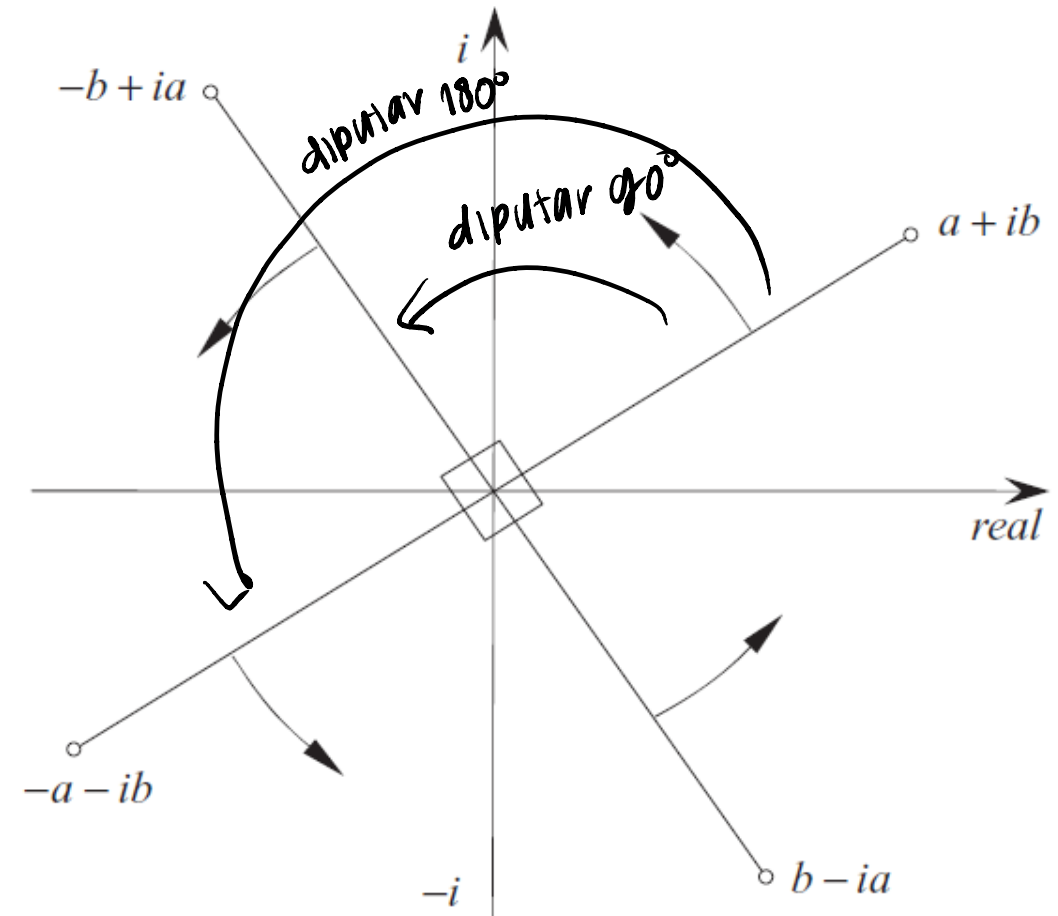
$$i(-b + ai) = -bi + ai^2 = -a - bi$$

- Jika $-a - bi$ dikalikan lagi dengan i , maka:

$$i(-a - bi) = -ai - bi^2 = b - ai$$

- Jika $b - ai$ dikalikan lagi dengan i , maka:

$$i(b - ai) = bi - ai^2 = a + bi$$



Pertanyaan: apa hasilnya jika $a + bi$ dikalikan dengan $-i$?

diputar searah jarum jam sebanyak 90°.

Persamaan Euler

- Bilangan alam e didefinisikan sebagai berikut:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

atau dapat juga dinyatakan dalam bentuk deret McLaurin:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

e^x dinyatakan dalam bentuk deret McLaurin sebagai berikut:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

- $\sin(x)$ dan $\cos(x)$, x dalam radian, dinyatakan dalam bentuk deret McLaurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots,$$

- Perpangkatan e dengan bilangan kompleks ix adalah sebagai berikut:

$$e^{ix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{i^n x^n}{n!} \right)$$

disederhanakan menjadi

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} \dots$$

- Kumpulkan bagian riil dan bagian imajiner menjadi:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \right)$$

\longleftrightarrow
 $\cos(x)$

 \longleftrightarrow
 $\sin(x)$

Jadi,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

dan,

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

atau,

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$$

Persamaan yang terkenal ini dinamakan formula Euler



Leonhard Euler

15 April 1707 - 18 September 1783

- **Contoh 4:** untuk $x = \pi/2$, maka

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = 0 + i(1) = i$$

untuk $x = \pi$, maka

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 - i(0) = -1$$

untuk $x = 0$, maka

$$e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 - i(0) = 1$$

untuk $x = \pi/4$, maka

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Apabila kita mengalikan $z = a + bi$ dengan $e^{i\pi}$ maka menjadi

$$z' = ze^{i\pi} = z(-1) = -(a + bi) = -a - bi$$

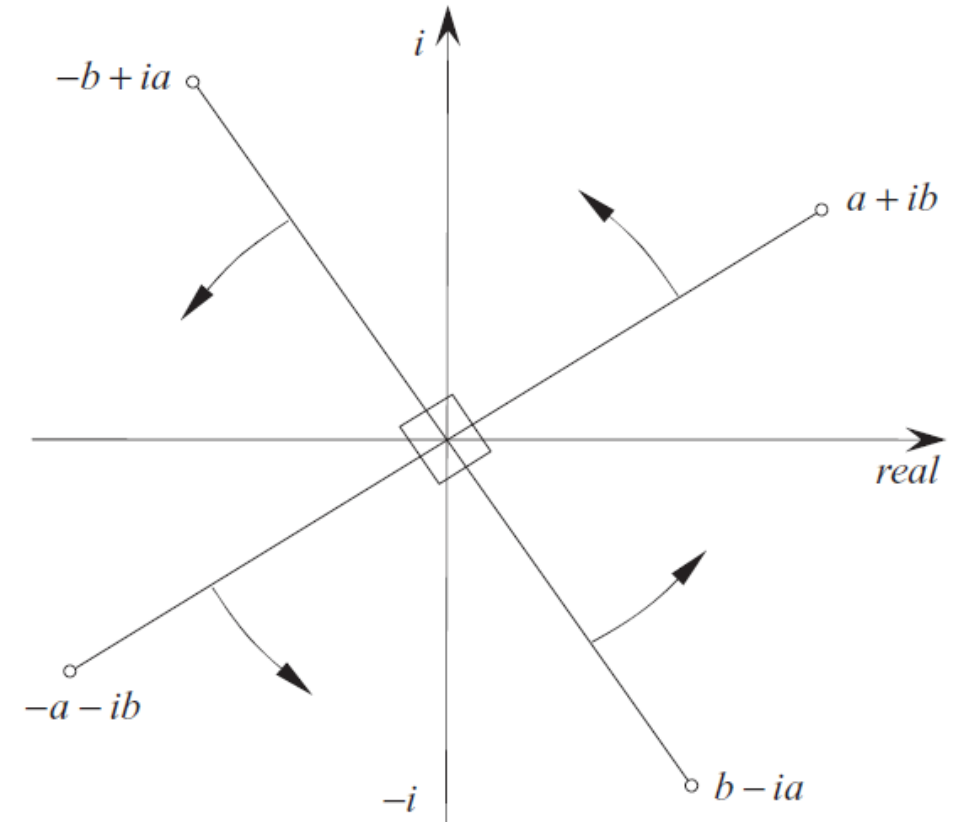
yang diinterpretasikan sebagai memutar vektor z sejauh 180° berlawanan jarum jam

- Begitu juga, jika kita mengalikan $z = a + bi$ dengan $e^{i\frac{\pi}{2}}$ maka menjadi:

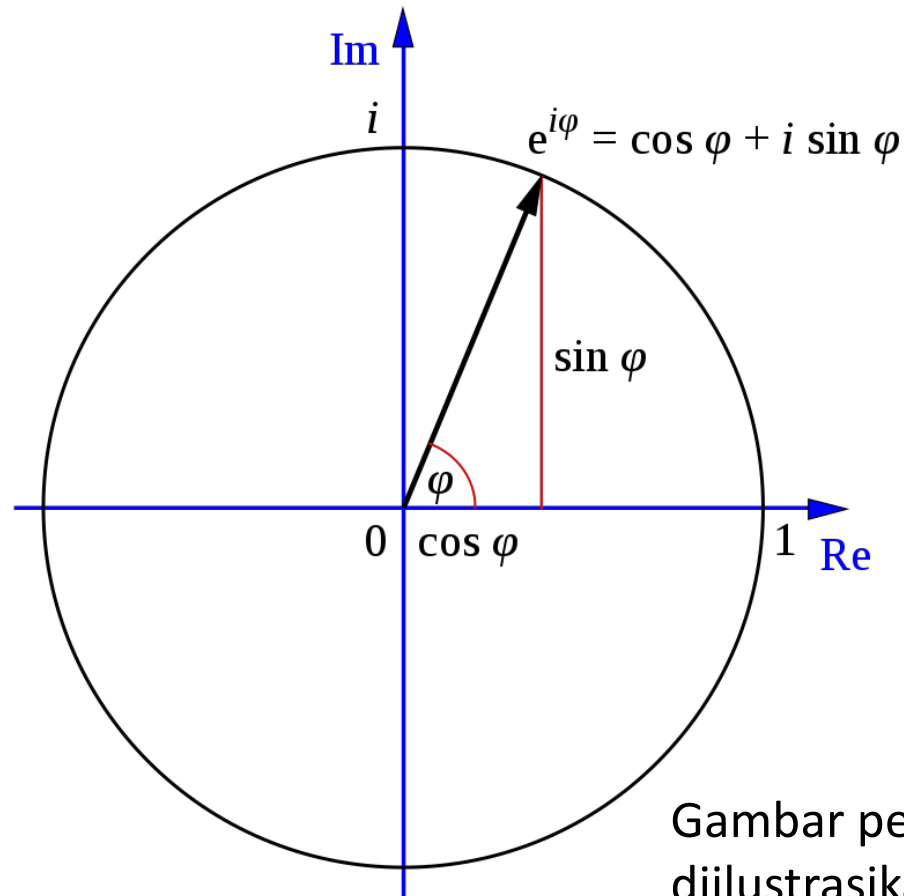
$$z' = ze^{i\frac{\pi}{2}} = zi = (a + bi)i = -b + ai$$

yang diinterpretasikan sebagai memutar vektor z sejauh 90° berlawanan arah jarum jam

- **Kesimpulan:** $e^{i\varphi}$ adalah sebuah rotor yang memutar z menjadi z' sejauh φ berlawanan arah jarum jam, yaitu $z' = ze^{i\varphi}$



Secara geometri diartikan $e^{i\varphi}$ terdapat di dalam lingkaran dengan jari-jari = 1 di dalam himpunan bilangan kompleks



Gambar persamaan $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ diilustrasikan di dalam bidang kompleks. (Sumber: Wikipedia)

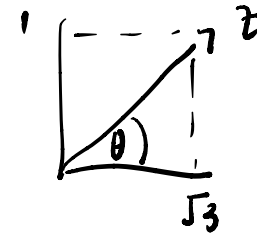
Contoh 5: Tentukan bayangan bilangan kompleks $z = 3 - 4i$ jika diputar sejauh 90 derajat berlawanan arah jarum jam

Jawaban:

$$\begin{aligned} z' &= z e^{i\varphi} = (3 - 4i) e^{90i} \\ &= (3 - 4i) (\cos 90 + i \sin 90) \\ &= (3 - 4i) (0 + i) \\ &= (3 - 4i) (i) \\ &= 3i - 4i^2 \\ &= 3i - 4(-1) \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

Latihan (Kuis 2022)

hitung modulusnya
dulu.



$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$
$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Nyatakan bilangan kompleks $z = \sqrt{3} + i$ dalam bentuk polar dan eksponen.

Jawaban:

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$
$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Dari masalah di atas, kita mempunyai $z = \sqrt{3} + i$, $r = \sqrt{3+1} = 2$ dan

$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Karena z di kuadran pertama, maka dipilih $\theta = \frac{\pi}{6}$, sehingga

$$z = |z| e^{i\theta}$$
$$= 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

didapat bentuk polar $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ dan bentuk eksponen $z = 2e^{i\pi/6}$.

Soal Latihan 1

1. Misalkan $z_1 = 3 - 8i$, $z_2 = 5 + 10i$, $z_3 = -6i$, $z_4 = 5$, hitunglah

- (i) $z_1 z_2$ (ii) $z_1 z_3$ (iii) $z_1 z_2 z_3$ (iv) z_1 / z_2 (v) z_1 / z_3 (vi) $z_1 z_2^*$ (vii) $z_2 z_4^*$ (viii) z_1^* / z_4^*

② $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$
 $e^{60i} = \cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ)$
 $= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Hitunglah e^{ix} dan e^{-ix} untuk $x = 60^\circ$

3. Sebuah bilangan kompleks $z = 4 - 9i$ diputar sejauh 120 derajat searah jarum jam, tentukan bayangannya.

③ $z' = z e^{i\theta}$
 sudutnya: -120° (searah).

4. Berapakah i^i ?

$= z e^{i(-120^\circ)} = z (\cos(-120^\circ) - i \sin(-120^\circ))$
 $= z (-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})$ **(hasilnya mengejutkan!)**

④ $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
 $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$
 $= 0 + i = i$
 $i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$
 ↳ imajiner² = riil 0.0

Vektor di Ruang Kompleks

- Ruang vektor yang elemen-elemennya berbentuk bilangan kompleks dinamakan **ruang vektor kompleks**.
- Ruang vektor kompleks berorde-n dilambangkan dengan C^n .
- Setiap vektor di dalam C^n memiliki n-komponen, yaitu $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, dalam hal ini v_1, v_2, \dots, v_n adalah bilangan kompleks:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = (a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, \dots, a_n + b_ni)$$

- Contoh vektor-vektor di C^3 :

$$\mathbf{u} = (1 + i, -4i, 3 + 2i), \quad \mathbf{v} = (0, i, 5), \quad \mathbf{w} = \left(6 - \sqrt{2}i, 9 + \frac{1}{2}i, \pi i\right)$$

- Setiap vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = (a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, \dots, a_n + b_ni)$$

di \mathbb{C}^n dapat dipecah menjadi bagian riil dan bagian imajiner:

$$\mathbf{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + i(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

yang juga dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{v} = \text{Re}(\mathbf{v}) + i \text{Im}(\mathbf{v})$$

dalam hal ini

$$\text{Re}(\mathbf{v}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{dan} \quad \text{Im}(\mathbf{v}) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

- Bentuk sekawan (*conjugate*) \mathbf{v} adalah $\bar{\mathbf{v}}$

$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) = (a_1 - b_1i, a_2 - b_2i, \dots, a_n - b_ni)$$

- **Contoh 5:** Misalkan

$$\mathbf{v} = (3 + i, -2i, 5) \quad \text{and} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= (3 - i, 2i, 5), \quad \overset{\text{real}}{\text{Re}(\mathbf{v})} = (3, 0, 5), \quad \overset{\text{imaginer}}{\text{Im}(\mathbf{v})} = (1, -2, 0) \\ \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 4 & 6+2i \end{bmatrix}, \quad \text{Re}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{Im}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{vmatrix} = (1+i)(6-2i) - (-i)(4) = 8 + 8i \end{aligned}$$

Teorema-teorema Aljabar Vektor Kompleks

THEOREM 5.3.1

If \mathbf{u} and \mathbf{v} are vectors in \mathbb{C}^n , and if k is a scalar, then:

$$(a) \quad \overline{\overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{u}$$

$$(b) \quad \overline{k\mathbf{u}} = \bar{k}\overline{\mathbf{u}}$$

$$(c) \quad \overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}}$$

$$(d) \quad \overline{\mathbf{u} - \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{v}}$$

THEOREM 5.3.2

If A is an $m \times k$ complex matrix and B is a $k \times n$ complex matrix, then:

$$(a) \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$(b) \quad \overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$$

$$(c) \quad \overline{AB} = \overline{A} \, \overline{B}$$

Perkalian titik kompleks (*complex dot product*)

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor di \mathbb{C}^n , maka perkalian titik dua buah vektor didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n$$

- Vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} orthogonal jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
- Norma Euclidean vektor \mathbf{v} adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

- Vektor satuan adalah jika $\|\mathbf{v}\| = 1$

- **Contoh 6:** Misalkan $\mathbf{u} = (1 + i, i, 3 - i)$, $\mathbf{v} = (1 + i, 2, 4i)$, maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1 + i)(\overline{1 + i}) + i(\overline{2}) + (3 - i)(\overline{4i}) = (1 + i)(1 - i) + 2i + (3 - i)(-4i) = -2 - 10i$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (1 + i)(\overline{1 + i}) + 2(\overline{i}) + (4i)(\overline{3 - i}) = (1 + i)(1 - i) - 2i + 4i(3 + i) = -2 + 10i$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|1 + i|^2 + |i|^2 + |3 - i|^2} = \sqrt{2 + 1 + 10} = \sqrt{13}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|1 + i|^2 + |2|^2 + |4i|^2} = \sqrt{2 + 4 + 16} = \sqrt{22}$$

THEOREM 5.3.3

If \mathbf{u} , \mathbf{v} , and \mathbf{w} are vectors in \mathbb{C}^n , and if k is a scalar, then the complex Euclidean inner product has the following properties:

$$(a) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$$

[Antisymmetry property]

$$(b) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

[Distributive property]

$$(c) k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

[Homogeneity property]

$$(d) \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v} = \overline{k}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

[Antihomogeneity property]

$$(e) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ and } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ if and only if } \mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

[Positivity property]

Nilai eigen dan vektor eigen kompleks

THEOREM 5.3.4

If λ is an eigenvalue of a real $n \times n$ matrix A , and if \mathbf{x} is a corresponding eigenvector, then $\bar{\lambda}$ is also an eigenvalue of A , and $\bar{\mathbf{x}}$ is a corresponding eigenvector.

Contoh 7: Tentukan nilai eigen dan basis ruang eigen dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawaban: Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Nilai-nilai eigennya adalah $\lambda = i$ dan $\lambda = -i$

Menghitung vektor eigen:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = i$,

$$\begin{bmatrix} i + 2 & 1 \\ -5 & i - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Bentuk augmented:} \quad \begin{bmatrix} i + 2 & 1 & 0 \\ -5 & i - 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan eliminasi Gauss-Jordan pada matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} i + 2 & 1 & 0 \\ -5 & i - 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} -5 & i - 2 & 0 \\ i + 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1/(-5)} \begin{bmatrix} 1 & 2/5 - i/5 & 0 \\ i + 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 - (i + 2)R1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Solusi: } x_1 + (2/5 - i/5)x_2 = 0$$

Misalkan $x_2 = t$, maka $x_1 = \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)t$

Basis ruang eigen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Periksa kembali bahwa $A\mathbf{x} = i\mathbf{x}$ sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) - 1 \\ 5\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ i \end{bmatrix} = i\mathbf{x}$$

Dengan cara yang sama untuk $\lambda = -i$ (namun tidak perlu dihitung, sesuai Teorema 5.3.4) diperoleh basis ruang eigennya adalah

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ yang merupakan bentuk sekawan dari basis ruang eigen sebelumnya}$$

Periksa kembali bahwa $A\mathbf{x} = -i\bar{\mathbf{x}}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A\bar{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) - 1 \\ 5\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ -i \end{bmatrix} = -i\bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

THEOREM 5.3.5

If A is a 2×2 matrix with real entries, then the characteristic equation of A is $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ and

- (a) A has two distinct real eigenvalues if $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) > 0$;
- (b) A has one repeated real eigenvalue if $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 0$;
- (c) A has two complex conjugate eigenvalues if $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$.

Contoh 8 In each part, use Formula 13 for the characteristic equation to find the eigenvalues of

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Solution

- (a) We have $\text{tr}(A) = 7$ and $\det(A) = 12$, so the characteristic equation of A is

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Factoring yields $(\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0$, so the eigenvalues of A are $\lambda = 4$ and $\lambda = 3$.

- (b) We have $\text{tr}(A) = 2$ and $\det(A) = 1$, so the characteristic equation of A is

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Factoring this equation yields $(\lambda - 1)^2 = 0$, so $\lambda = 1$ is the only eigenvalue of A ; it has algebraic multiplicity 2.

- (c) We have $\text{tr}(A) = 4$ and $\det(A) = 13$, so the characteristic equation of A is

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Solving this equation by the quadratic formula yields

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(13)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

Thus, the eigenvalues of A are $\lambda = 2 + 3i$ and $\lambda = 2 - 3i$.

Latihan 2

1. Selesaikan $i\mathbf{x} - 3\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$ jika $\mathbf{u} = (3 - 4i, 2 + i, -6i)$ dan $\mathbf{v} = (1 + i, 2 - i, 4)$
2. Hitunglah $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ jika diketahui $\mathbf{u} = (2 - 3i, i, 4 - 6i)$ dan $\mathbf{v} = (1 + i, 2 - i, 0)$, dan $\mathbf{w} = (-5i, 2 + i, 4)$
3. Hitunglah nilai eigen dan basis ruang eigen untuk matriks2 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$