Seri bahan kuliah Algeo 23

Dekomposisi LU

Update 2023

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

- Jika matriks *A* persegi *non-singular* maka ia dapat difaktorkan (di-dekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah *L* (*lower*) dan matriks segitiga atas *U* (*upper*):

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

L = matriks segitiga bawah (*lower triangular matrix*),
U = matriks segitiga atas (*upper triangular matrix*)

Untuk n = 4:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Contoh:

1) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{bmatrix}$$

3

2) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Catatan:

1. Di dalam materi PPT ini, seperti juga di dalam literatur lain, elemen diagonal utama matriks L semuanya 1

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

2. Di dalam buku Howard Anton, elemen di dalam diagonal utama matriks U yang semuanya 1 (matriks eselon baris), seperti di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad = \qquad L \qquad U$$

3. Perbedaan keduanya tidak masalah karena hasil kali keduanya tetap sama dengan A. Kita akan menggunakan bentuk yang nomor 1

- Memfaktorkan matriks A menjadi matriks L dan U sehingga menjadi A = LU dinamakan **dekomposisi LU** (*LU-decomposition*)

- Terdapat dua metode untuk memfaktorkan *A* menjadi *L* dan *U*:

  1. Metode *LU*-Gauss.

     - Berdasarkan pada metode eliminasi Gauss

  2. Metode reduksi Crout

     - Berdasarkan kesamaan dua buah matriks

Pemfaktoran dengan Metode LU-Gauss

Misalkan matriks A berukuran 4×4 difaktorkan atas L dan U,

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

- Di sini kita menggunakan simbol m_{ij} ketimbang l_{ij}, karena nilai l_{ij} berasal dari faktor pengali (m_{ij}) pada operasi baris elementer (OBE), yaitu $R_j - m_{ij}R_i$.

- Langkah-langkah pembentukan L dan U dari matriks A adalah sebagai berikut:

1. Nyatakan A sebagai $A = IA$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Lakukan eliminasi Gauss pada matriks A menjadi matriks U. Tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di dalam matriks I.

3. Setelah seluruh proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi matriks L, dan matriks A di ruas kanan menjadi matriks U.

Contoh 1 (Kasus: tidak ada pertukaran baris selama OBE):

(LU Gauss naif – tidak ada pertukaran baris)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - (^{-2}/_4)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (^1/_4)R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix}$$

Tempatkan $m_{21} = -2/4 = -0.5$ dan $m_{31} = 1/4 = 0.25$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-0.5} & 1 & 0 \\ \boxed{0.25} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 - ({}^{1.25}/_{-2.5})R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 1.25/-2.5 = -0.5$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & \boxed{-0.5} & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Aplikasi Dekomposisi LU

- Dekomposisi LU dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier Ax = b.

- Setelah A difaktorkan menjadi A = LU, maka

$$Ax = b$$

Ganti A dengan LU: $LUx = b$

- Misalkan

$$Ux = y$$

bakal dpt x1, x2, ..., xn
dgn sulih mundur

cari Ly = b dulu baru Ux = y

maka

$$Ly = b$$

bakal dpt y1, y2, ..., yn
dgn sulih maju

Untuk memperoleh y_1, y_2,…, y_n , kita menggunakan teknik penyulihan maju (*forward substitution*) :

$$Ly = b \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow$$

diperoleh $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dengan teknik penyulihan maju

Dan untuk memperoleh solusi SPL, x_1, x_2,…, x_n, kita menggunakan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*):

$$Ux = y \quad \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix} \longrightarrow$$

diperoleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan teknik penyulihan mundur

- Jadi, langkah-langkah menghitung solusi SPL Ax = b dengan metode dekomposisi *LU* dapat diringkas sebagai berikut:

1. Dekomposisi A menjadi matriks *L* dan *U*
2. Pecahkan *Ly* = *b*, lalu hitung *y* dengan teknik penyulihan maju
3. Pecahkan *Ux* = *y*, lalu hitung *x* dengan teknik penyulihan mundur

- Misalkan SPL Ax = b adalah:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A sudah difaktorkan menjadi L dan U pada Contoh 1, yaitu

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

- Maka, solusi Ax = b adalah sebagai berikut:

Ly = b

dikasi tau soal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $y_1 = 2$

$\rightarrow$ $-0.5y_1 + y_2 = 1$ $\rightarrow$ $y_2 = 1 + 0.5y_1 = 1 + (0.5)(2) = 2$

$\rightarrow$ $0.25y_1 - 0.5y_2 + y_3 = 0$ $\rightarrow$ $y_3 = 0 - 0.25y_1 + 0.5y_2$

$= 0 - (0.25)(2) + (0.5)(2)$

$= 0 - (0.5) + (1) = 0.5$

Ux = y

masukin y1, y2, y3

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $8.5x_3 = 0.5$ $\rightarrow$ $x_3 = 0.5/8.5 = 0.0588$

$\rightarrow$ $-2.5x_2 + 4.5x_3 = 2$ $\rightarrow$ $x_2 = (2 - 4.5x_3)/(-2.5)$

$= (2 - (4.5)(0.0588))/(-2.5) = -0.69412$

$\rightarrow$ $4x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$ $\rightarrow$ $x_1 = (2 - 3x_2 + x_3)/4$

$= (2 - (3)(-0.69412) + 0.0588)/4$

$= (2 + 0.3 + 0.5) = 1.03529$

Jadi, solusi SPL adalah $x_1 = 1.03529$, $x_2 = -0.69412$, dan $x_3 = 0.0588$

Contoh 2 (Kasus: ada pertukaran baris selama OBE)

Faktorkan matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lalu pecahkan sistem $Ax = b$.

Penyelesaian:

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 - (2)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (-^1/_1)R_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tempatkan m_{21} = 2 dan m_{31}= -1/1 = -1 ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A. Dalam hal ini calon *pivot* bernilai 0, sehingga baris kedua dipertukarkan dengan baris ketiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

kalo barisnya dituker, janlup tuker baris L sama B jg

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada matriks L, kecuali elemen diagonalnya

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada vektor b,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A:

$$R_3 - (^0/_2)R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 0/2 = 0$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$\begin{array}{lll} y_1 & = 1 & \\ -y_1 + y_2 & = 1 & \rightarrow y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ 2y_1 + 0y_2 + y_3 & = 5 & \rightarrow y_3 = 5 - 2y_1 = 3 \end{array}$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$\begin{array}{lll} 3x_3 & = 3 & \rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 0x_3 & = 2 & \rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 & \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

Pertukaran baris untuk matriks yang berukuran besar diperlihatkan oleh matriks di bawah ini:

$$
A \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix} \underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix}
$$

Maka, baris ke-5 dan baris ke-4 pada matriks L juga harus dipertukarkan:

$$
L \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & 0 & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & x & 1 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1 \end{bmatrix} \underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & 1 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & x & 1 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1 \end{bmatrix}
$$

- Tidak semua matriks bujursangkar dapat difaktorkan menjadi L dan U. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 3: Faktorkan matriks A berikut menjadi L dan U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{R3 - 2R1}{\overset{R2 - 3R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriks L sejauh ini} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & m_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena baris 3 seluruhnya 0, maka nilai m_{32} tidak dapat ditentukan, sehingga matriks A tidak dapat difaktorkan menjadi LU.

Pemfaktoran dengan Metode Reduksi Crout

- Meskipun metode *LU* Gauss dapat digunakan untuk melakukan dekomposisi *LU*, terdapat metode dekompoisisi LU lain yang digunakan secara luas, yaitu metode reduksi Crout
- Nama lain: **metode reduksi Cholesky** atau **metode *Dolittle***

Dalam membahas metode reduksi Crout, tinjau matriks 3×3 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{2,2} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $LU = A$, maka hasil perkalian L dan U itu dapat ditulis sebagai

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{13} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan dua buah matriks $LU = A$, diperoleh

$$\left.u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \right\} \text{ Baris pertama } U$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_1 &= a_{21} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} &= a_{31} \rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned}\right\} \text{Kolom pertama } L$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} \rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} \rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned}\right\} \text{ Baris kedua } U$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

Kolom kedua *L*

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow \quad u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \quad \}$$

Baris ketiga *U*

Kita perhatikan ada urutan pola teratur (berselang-seling) dalam menemukan elemen-elemen *L* dan *U*, yaitu:

(1) hitung elemen-elemen baris pertama dari *U*
(2) hitung elemen-elemen kolom pertama dari *L*
(3) hitung elemen-elemen baris kedua dari *U*
(4) hitung elemen-elemen kolom kedua *L*
(5) … dst
(…) hitung elemen-elemen baris ke-*k* dari *U*
(…) hitung elemen-elemen kolom ke-*k* dari *L*

Rumus umum menghitung u dan l untuk sistem dengan matriks A yang berukuran 3×3 dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}\, u_{kj}, \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = p, p+1, \ldots, n \end{array} \qquad \text{(P.4.13)}$$

dan

$$l_{iq} = \frac{a_{iq} - \sum_{k=1}^{q-1} 1_{ik}\, u_{kq}}{u_{qq}} \quad , \quad \begin{array}{c} q = 1, 2, 3, \ldots, n\text{-}1 \\ i = q+1, q+2, \ldots, n \\ \text{dengan syarat } u_{qq} \neq 0 \end{array} \qquad \text{(P.4.14)}$$

Contoh 4: Selesaikan SPL

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad - x_3 &= 1 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

dengan metode dekomposisi *LU*, yang dalam hal ini *L* dan *U* dihitung dengan metode reduksi Crout.

Penyelesaian:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Diperoleh:

$u_{11} = a_{11} = 1$

$u_{12} = a_{12} = 1$ $\leftarrow$ elemen-elemen baris pertama U

$u_{13} = a_{13} = -1$

$l_{21} = a_{21}/u_{11} = 2/1 = 2$ $\leftarrow$ elemen-elemen kolom pertama U

$l_{31} = a_{31}/u_{11} = -1/1 = -1$

$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$ $\leftarrow$ elemen-elemen baris kedua U

Karena u_{qq} tidak boleh nol, lakukan pertukaran baris, baik untuk matriks A maupun untuk vektor b:

<u>Matriks A</u> <u>Vektor b</u>

$$R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hitung kembali nilai l_{21} , l_{31} , dan u_{22} (Perhatikan bahwa nilai u_{11}, u_{12}, u_{13} tidak berubah)

$l_{21} = a_{21}/u_{11} = -1/1 = -1$
$l_{31} = a_{31}/u_{11} = 2/1 = 2$ ← elemen-elemen kolom pertama L

$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$ ← elemen-elemen baris kedua U
$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - (-1)(-1) = 1\text{-}1 = 0$ boleh 0 krn ga dipake sbg pengali

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{2 - 2(1)}{2} = 0$$ ← elemen-elemen kolom kedua L

Diperoleh L dan U sebagai berikut,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$y_1 = 1$

$-y_1 + y_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2$

$2y_1 + 0y_2 + y_3 = 5 \rightarrow y_3 = 5 - 2y_1 = 3$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$3x_3 = 3 \rightarrow x_3 = 1$

$2x_2 + 0x_3 = 2 \rightarrow x_2 = 1$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

Dekomposisi LU adalah metode yang kompak

- Jika diamati elemen segitiga bawah pada matriks *U* semuanya bernilai nol, sehingga ruang yang tidak terpakai itu dapat dipakai untuk menyimpan elemen matriks *L*.

- Elemen diagonal matriks *L* seluruhnya 1, jadi tidak perlu disimpan (*default*). Dengan demikian, penyimpanan elemen *L* dan *U* pada satu matriks dapat menghemat penggunaan memori.

- Selain itu, matriks *A* hanya dipakai sekali untuk memperoleh *L* dan *U*, sesudah itu tidak dipakai lagi.

- Dengan demikian, setelah *L* dan *U* diperoleh, elemennya dapat dipindahkan ke dalam *A*.

- Karena alasan ini, maka metode dekomposisi *LU* dinamakan juga metode kompaksi memori.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -0.5 & -2.5 & 4.5 \\ 0.25 & -0.5 & 8 \end{bmatrix}$$

L dan U disatukan

Menghitung Determinan A = LU

- Determinan matriks A dapat dihitung dari perkalian determinan matriks L dan determinan matriks U.

Kasus 1: Jika di dalam metode LU-Gauss tidak ada pertukaran baris

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det(LU) \\
&= \det(L) \times \det(U) \\
&= (1) \times \det(U) \\
&= \det(\mathrm{U}) \\
&= u_{11}\, u_{22}\, u_{33} \ldots u_{nn}
\end{aligned}
$$

Keterangan: det(L) = 1 sebab semua elemen diagonal L adalah satu.

Kasus 2: Jika di dalam metode LU-Gauss terdapat pertukaran baris

- Jika terdapat operasi pertukaran baris, maka dekomposisi *LU* dengan operasi pertukaran baris setara dengan mengerjakan dua proses terpisah berikut:
  1. Pertukaran baris dapat dipandang sebagai transformasi matriks *A* menjadi matriks *A*' dengan cara permutasi baris-baris matriks (sama dengan mengalikan *A* dengan matriks permutasi *P*),

     $A' = PA$ atau setara dengan $A = P^{-1} A'$

  2. Dekomposisi *A*' menjadi *LU* tanpa operasi pertukaran baris

     $A' = LU$

- Dari (1) dan (2), L dan U dihubungkan dengan A oleh

$$A = P^{-1} A' = P^{-1} LU$$

- Determinan A dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P^{-1}) \times \det(L) \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times 1 \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(U) \\ &= \alpha \det(U)\end{aligned}$$

yang dalam hal ini $\alpha = \det(P^{-1}) = -1$ atau 1 bergantung pada apakah pertukaran baris dilakukan sejumlah bilangan ganjil atau genap.

- Jika terjadi pertukaran baris sejumlah p kali, maka α dapat ditulis sebagai:

  $\alpha = (-1)^p$

- α bernilai 1 untuk p genap dan -1 untuk p ganjil. Karena itu,

  $\det(A) = (-1)^p \det(U) = (-1)^p\ u_{11}\ u_{22}\ u_{33} \ldots u_{nn}$

- Jika di dalam operasi baris elementer terdapat perkalian baris-baris matriks dengan k_1, k_2, …, k_m, maka

$$\det(A) = \frac{(-1)^p\ u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}}{k_1 k_2 \ldots k_m}$$

Contoh 5: Hitung determinan matriks *A* berikut berdasarkan dekomposisi LU:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 - {}^{4}/_{2}\, R_1 \\ R_3 - {}^{-2}/_{2}\, R_1 \\ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad R_3 - {}^{6}/_{-2}\, R_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Tidak ada proses pertukaran baris selama eliminasi Gauss, maka

det (A) = (2) (-2) (-5) = 20

Latihan (Kuis 2022)

a) Selesaikan SPL Ax = b berikut dengan metode dekomposisi LU. Metode pemfaktorkan A menjadi L dan U yang digunakan adalah metode reduksi Crout.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Tuliskan A sebagai hasil kali L dan U, verifikasi hasil perkaliannya.

(Jawaban sedudah halaman ini)

Jawaban:

$u_{11} = a_{11}$, $u_{12} = a_{12}$, $u_{13} = a_{13}$ } Baris pertama *U*

$l_{21}u_1 = a_{21} \rightarrow l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}}$

$l_{31}u_{11} = a_{31} \rightarrow l_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}}$

} Kolom pertama *L*

$l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$

} Baris kedua *U*

$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$ Kolom kedua *L*

$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23})$ } Baris ketiga *U* u11 = a11 = 2, u12 = a12 = 2, u13 = a13 = -2

l21 = a21/u11 = 4/2 = 2

l31 = a31/u12 = -2/2 = -1

u22 = a22 – l21u12 = 4 – (2)(2) = 0 → tidak boleh nol

Pertukarkan baris kedua dengan ketiga:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ulang lagi menghtung l21, l31, dan u22

l21 = a21/u11 = -2/2 = -1

l31 = a31/u12 = 4/2 = 2

u22 = a22 – l21u12 = 2 – (-1)(2) = 4

u23 = a23 – l21u13 = 4 – (-1)(-2) = 2

l32 = (a32 – l31u12)/u22 = (4 – (2)(2))/4 = 0/4 = 0

u33 = a33 – (l31u13 – l32u23) = 1 – ((2)(-2) – (0)(2)) = 5

Jadi,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL:

Ly = b → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

y1 = 5

y2 = -1 + y1 = -1 + 5 = 4

y3 = -2y1 = (-2)(5) = -10

Ux = y → $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$

5x3 = -10 → x3 = -2

4x2 + 2x3 = 4 → x2 = (4 – 2x3)/4 = (4 + 4)/4 = 2

2x1 + 2x2 – 2x3 = 5 → x1 = (5 – 2x2 + 2x3)/2 = (5 – 4 – 4)/2 = -1,5

Solusi (x1, x2, x3) =(-1.5, 2, -2)

b) LU = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ = A yang sudah dipertukarkan baris

Soal Latihan

1. Faktorkan matriks A berikut menjadi A = LU

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

lalu gunakan L dan U untuk menyelesaikan SPL:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 \qquad\quad + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2. Selesaikan SPL-SPL berikut menggunakan dekomposisi LU

a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 10 & -10 \\ -2 & -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$