IF2120 Matematika Diskrit

Aljabar Boolean (Bag. 1)

(Update 2023)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Pengantar

- Aljabar Boolean ditemukan oleh George Boole, pada tahun 1854.

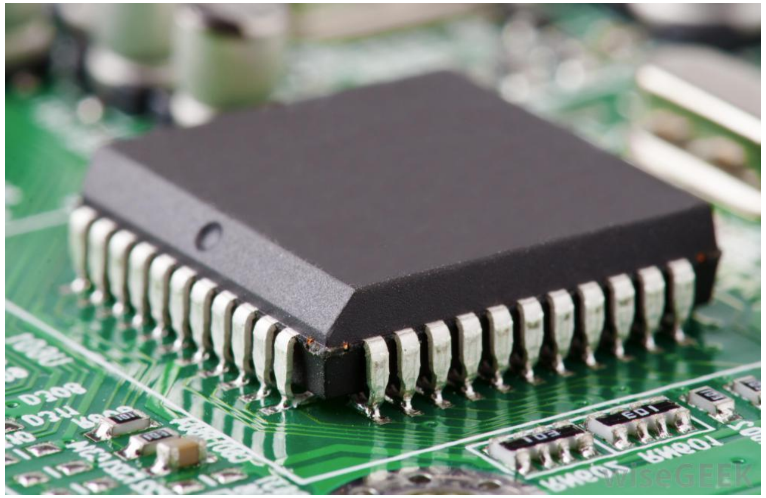
- Boole melihat bahwa himpunan dan logika proposisi mempunyai sifat-sifat yang serupa (perhatikan kemiripan hukum-hukum aljabar logika dan hukum-hukum aljabar himpunan).

- Dalam buku *The Laws of Thought*, Boole memaparkan aturan-aturan dasar logika.

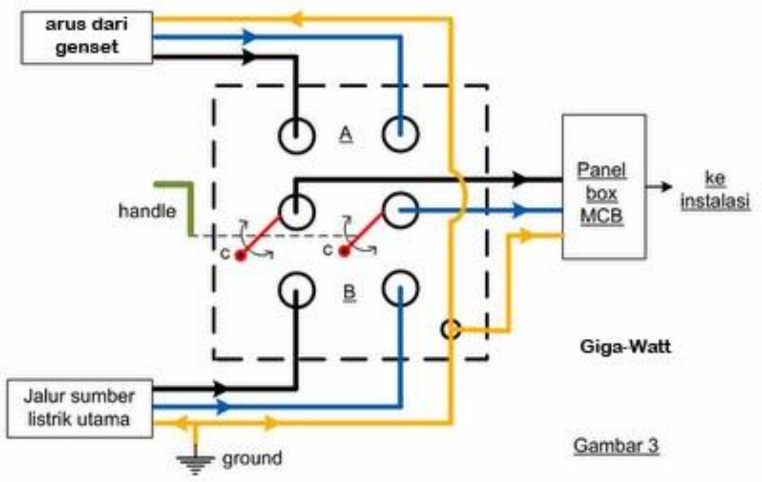
- Aturan dasar logika ini membentuk struktur matematika yang disebut **aljabar Boolean.**

- Aplikasi: perancangan rangkaian pensaklaran, rangkaian digital, dan rangkaian *IC* (*integrated circuit*) komputer

Peraga digital



Integarted Circuit (IC)



Jaringan saklar

Definisi Aljabar Boolean

DEFINISI. Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operator biner, + dan $\cdot$, dan sebuah operator uner, ’. Misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B. Maka, tupel

$$\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma berikut:

1. Identitas
   - (i) $a + 0 = a$
   - (ii) $a \cdot 1 = a$

2. Komutatif
   - (i) $a + b = b + a$
   - (ii) $a \cdot b = b . a$

3. Distributif
   - (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   - (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

4. Komplemen

   Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $a' \in B$ sehingga
   - (i) $a + a' = 1$
   - (ii) $a \cdot a' = 0$

- Berhubung elemen-elemen *B* tidak didefinisikan nilainya (kita bebas menentukan anggota-anggota *B*), maka terdapat banyak sekali aljabar boolean.

- Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, orang harus memperlihatkan:
  1. elemen-elemen himpunan *B*,
  2. kaidah/aturan operasi untuk dua operator biner dan operator uner,
  3. himpunan *B*, bersama-sama dengan dua operator tersebut, memenuhi keempat aksioma di atas

- Aljabar himpunan dan aljabar logika proposisi juga merupakan aljabar Boolean karena memenuhi empat aksioma di atas.

- Dengan kata lain, aljabar himpunan dan aljabar proposisi adalah himpunan bagian (*subset*) dari aljabar Boolean.

- Pada aljabar proposisi misalnya:

  - *B* berisi semua proposisi dengan *n* peubah.
  - dua elemen unik berbeda dari *B* adalah **T** dan **F**,
  - operator biner: $\vee$ dan $\wedge$, operator uner: ~
  - semua aksioma pada definisi di atas dipenuhi

Dengan kata lain <*B*, $\vee$, $\wedge$, ~, **F**, **T**> adalah aljabar Booelan

Aljabar Boolean 2-Nilai

- Merupakan aljabar Boolean yang paling popular, karena aplikasinya luas.
- Pada aljabar 2-nilai:

  (i) $B = \{0, 1\}$,

  (ii) operator biner: $+$ dan $\cdot$, operator uner: $'$

  (iii) Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

  (iv) Keempat aksioma di atas dipenuhi

Ekspresi Boolean

- Ekspresi Boolean dibentuk dari elemen-elemen *B* dan/atau peubah-peubah yang dapat dikombinasikan satu sama lain dengan operator +, ·, dan ’.

- **Contoh 1:**

  0

  1

  a

  b

  $a + b$

  $a \cdot b$

  $a' \cdot (b + c)$

  $a \cdot b' + a \cdot b \cdot c' + b'$, dan sebagainya

Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum identitas: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum penyerapan: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$
7. Hukum komutatif: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum asosiatif: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$
9. Hukum distributif: (i) $a + (b\ c) = (a + b)\ (a + c)$ (ii) $a\ (b + c) = a\ b + a\ c$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

Contoh 2: Buktikan bahwa untuk sembarang elemen a dan b dari aljabar Boolean maka kesamaaan berikut:

$$a + a'b = a + b \quad \text{dan} \quad a(a' + b) = ab$$

adalah benar.

Penyelesaian:

(i) $a + a'b = (a + ab) + a'b$ (Hukum Penyerapan)
$= a + (ab + a'b)$ (Hukum Asosiatif)
$= a + (a + a')b$ (Hukum Distributif)
$= a + 1 \cdot b$ (Hukum Komplemen)
$= a + b$ (Hukum Identitas)

(ii) $a(a' + b) = a\,a' + ab$ (Hukum Distributif)
$= 0 + ab$ (Hukum Komplemen)
$= ab$ (Hukum Identitas)

Fungsi Boolean

- Contoh-contoh fungsi Boolean:

  $f(x) = x$

  $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

  $f(x, y) = x'\ y'$

  $f(x, y) = (x + y)'$

  $f(x, y, z) = xyz'$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal**.

- Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ terdiri dari 3 buah literal, yaitu x, y, dan z'.

- Jika diberikan $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, maka nilai fungsinya:

  $h(1, 1, 0) = 1 \cdot 1 \cdot 0' = (1 \cdot 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

Latihan (Kuis 2022)

Dengan menggunakan hukum-hukum aljabar Boolean, tentukan bentuk komplemen dari fungsi Boolean $f(x,y,z) = x'y(x + z + yz')$

Jawaban:

$$
\begin{aligned}
f'(x,y,z) &= (x'y\,(x + z + yz'))' \\
&= (x'y)' + (x + z + yz')' && \text{(Hukum De Morgan)} \\
&= (x + y') + x'z'(yz')' && \text{(Hukum De Morgan)} \\
&= x + y' + x'z'(y' + z) && \text{(Hukum De Morgan)} \\
&= x + y' + x'y'z' + x'z'z && \text{(Hukum Distributif)} \\
&= x + y' + x'yz' + 0 \\
&= x + y' + x'y'z
\end{aligned}
$$

Latihan (2015)

Nyatakan fungsi Boolean $f(x,y,z) = x'(x + y' + z')$ hanya dengan menggunakan operator + dan komplemen (‘) saja.

Jawaban:

$f(x,y) = x'(x+y'+z')$

$= x'x + x'y' + x'z'$

$= 0 + x'y' + x'z'$

$= x'y' + x'z'$

$= (x+y)' + (x+z)'$

Bentuk Kanonik

- Ekspresi Boolean yang menspesifikasikan suatu fungsi dapat disajikan dalam dua bentuk berbeda.

- Pertama, sebagai **penjumlahan dari hasil kali** dan kedua sebagai **perkalian dari hasil jumlah**.

- **Contoh 3:**

sum of product

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

dan

product of sum

$$g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$$

adalah dua buah fungsi yang sama.

- *Minterm*: suku (*term*) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil kali

- *Maxterm*: suku (*term*) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil jumlah.

- **Contoh 4:**

  $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ → 3 buah *minterm*: $x'y'z$, $xy'z'$, xyz

  $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$

  → 5 buah *maxterm*: $(x + y + z)$, $(x + y' + z)$, $(x + y' + z')$, $(x' + y + z')$, dan $(x' + y' + z)$

- Misalkan peubah (*variable*) fungsi Boolean adalah x, y, dan z

  Maka:

  $x'y$ → bukan *minterm* karena literal tidak lengkap

  $y'z'$ → bukan minterm karena literal tidak lengkap

  $xy'z$, xyz', $x'y'z$ → *minterm* karena literal lengkap

  $(x + z)$ → bukan maxterm karena literal tidak lengkap

  $(x' + y + z')$ → *maxterm* karena literal lengkap

  $(xy' + y' + z)$ → bukan *maxterm*

- Ekspresi Boolean yang dinyatakan sebagai penjumlahan dari satu atau lebih *minterm* atau perkalian dari satu atau lebih *maxterm* disebut dalam **bentuk kanonik**.

- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:
  1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP)
  2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

- Fungsi $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ dikatakan dalam bentuk SOP

- Fungsi $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$ dikatakan dalam bentuk POS

Cara membentuk *minterm* dan *maxterm*:

- Untuk *minterm*, setiap peubah yang bernilai 0 dinyatakan dalam bentuk komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan tanpa komplemen.

- Sebaliknya, untuk *maxterm*, setiap peubah yang bernilai 0 dinyatakan tanpa komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan dalam bentuk komplemen.

- Cara membentuk *minterm* dan *maxterm* dari tabel kebenaran untuk dua peubah:

maxterm selalu komplemennya minterm

		Minterm		*Maxterm*	
x	y	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x\,y$	m_3	$x' + y'$	M_3

- Cara membentuk *minterm* dan *maxterm* dari tabel kebenaran untuk tiga peubah:

			Minterm		*Maxterm*	
x	y	z	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y\ z'$	m_2	$x + y'+z$	M_2
0	1	1	$x'y\ z$	m_3	$x + y'+z'$	M_3
1	0	0	$x\ y'z'$	m_4	$x'+ y + z$	M_4
1	0	1	$x\ y'z$	m_5	$x'+ y + z'$	M_5
1	1	0	$x\ y\ z'$	m_6	$x'+ y'+ z$	M_6
1	1	1	$x\ y\ z$	m_7	$x'+ y'+ z'$	M_7

MINTERM

kalo suatu kombinasi ga memenuhi syarat, DITAMBAH dengan kombinasi lain

- Jika diberikan sebuah tabel kebenaran, kita dapat membentuk fungsi Boolean dalam bentuk kanonik (SOP atau POS) dari tabel tersebut dengan cara:

  - mengambil *minterm* dari setiap nilai fungsi yang bernilai 1 (untuk SOP)

    atau

  - mengambil *maxterm* dari setiap nilai fungsi yang bernilai 0 (untuk POS).

Contoh 5: Tinjau fungsi Boolean yang dinyatakan oleh Tabel di bawah ini. Nyatakan fungsi tersebut dalam bentuk kanonik SOP dan POS

kalo minterm cari yang hasilnya 1

x	y	z	$f(x, y, z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	1	x'y'z
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	xy'z'
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	xyz

Penyelesaian:

- **SOP** = minterm

  Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum (1, 4, 7)$$

- **POS** = maxterm

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

kalo maxterm cari yang hasilnya 0

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$$

Contoh 6: Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

harus ada xyz

Penyelesaian:

(a) SOP

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama.

$$
\begin{aligned}
x &= x(y + y') \\
&= xy + xy' \\
&= xy(z + z') + xy'(z + z') \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'
\end{aligned}
$$

sop tuh operatornya +

dan

$$y'z = y'z(x + x') = xy'z + x'y'z$$

Jadi

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= x + y'z \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z \\
&= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz
\end{aligned}
$$

atau $f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma\,(1,4,5,6,7)$

(b) POS

$f(x, y, z) = x + y'z$
$= (x + y')(x + z)$

Lengkapi terlebih dahulu literal pada setiap suku agar jumlahnya sama:

$x + y' = x + y' + zz'$
$= (x + y' + z)(x + y' + z')$

$x + z = x + z + yy'$
$= (x + y + z)(x + y' + z)$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$
$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

atau $f(x, y, z) = M_0M_2M_3 = \prod(0, 2, 3)$

Contoh 7: Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = xy + x'z$ dalam bentuk kanonik POS.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= xy + x'z \\
&= (xy + x')(xy + z) \\
&= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\
&= (x' + y)(x + z)(y + z)
\end{aligned}
$$

Lengkapi literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama:

$$
\begin{aligned}
x' + y &= x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z') \\
x + z &= x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z) \\
y + z &= y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)
\end{aligned}
$$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$

atau $f(x, y, z) = M_0 M_2 M_4 M_5 = \prod(0,2,4,5)$

Latihan (Kuis 2021)

Nyatakan fungsi Boolean $f(x,y,z) = x'y + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS

Jawaban:

(a) SOP

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama

$$x'y = x'y(z + z')$$
$$= x'yz + x'yz'$$

$$y'z = y'z(x+x')$$
$$= xy'z + x'y'z$$

sehingga $f(x,y,z) = x'yz + x'yz' + xy'z + x'y'z$

atau $f(x,y,z) = m_3 + m_2 + m_5 + m_1 = \Sigma(1,2,3,5)$

(b) POS

Dari jawaban yang diperoleh melalui langkah (a) dan menggunakan konversi antar kanonik menggunakan hukum De Morgan, maka

- $f(x,y,z) = (f\,'(x,y,z))'$
- $f(x,y,z) = (0,4,6,7) = (x + y + z)(x' + y + z)(x' + y' + z)(x' + y' + z')$

Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan f adalah fungsi Boolean dalam bentuk SOP dengan tiga peubah:

$$f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7)$$

dan f' adalah fungsi komplemen dari f,

$$f'(x, y, z) = \Sigma\ (0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0' \,.\, m_2' \,.\, m_3' \\ &= (x'y'z')'\ (x'y\,z')'\ (x'y\,z)' \\ &= (x + y + z)\ (x + y' + z)\ (x + y' + z') \\ &= M_0\, M_2\, M_3 = \prod\ (0,2,3) \end{aligned}$$

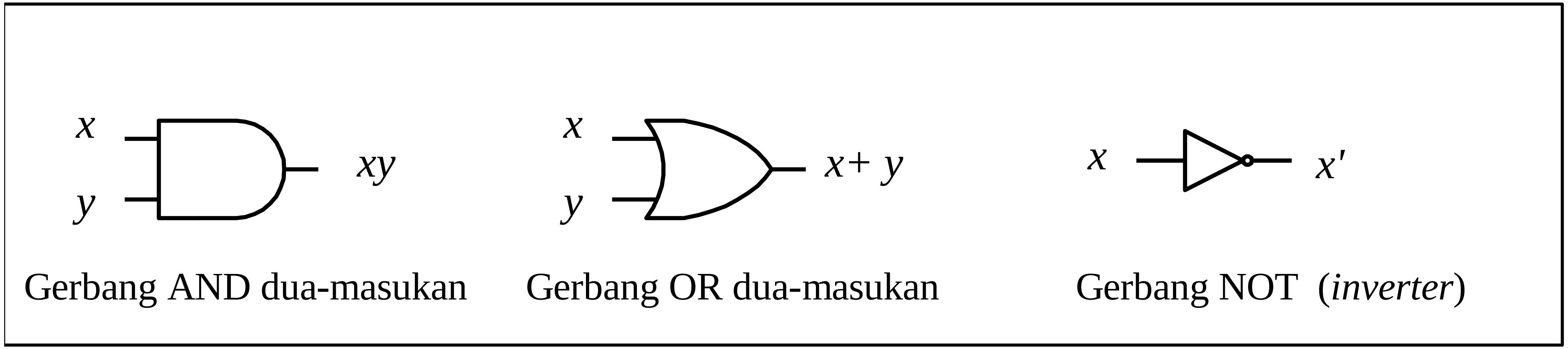
Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7) = \prod\ (0,2,3)$.

Kesimpulan: $m_j' = M_j$

Rangkaian Logika

- Fungsi Boolean dapat juag direpresentasikan dalam bentuk rangkaian logika.

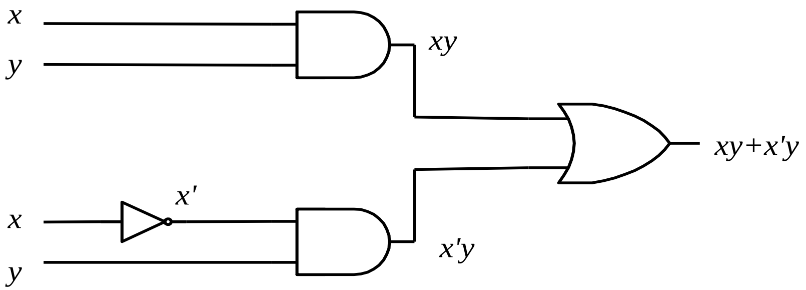
- Ada tiga gerbang logika dasar: gerbang AND, gerbang OR, dan gerbang NOT



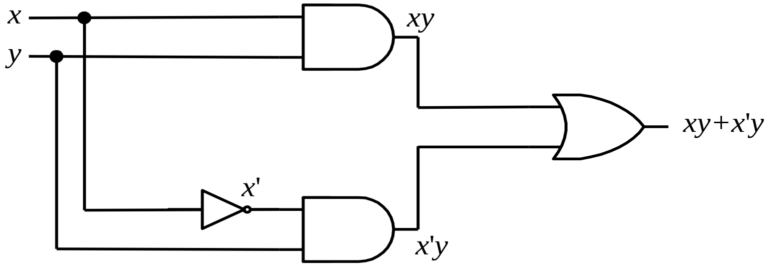
Contoh 8: Nyatakan fungsi $f(x, y, z) = xy + x'y$ ke dalam rangkaian logika.

<u>Penyelesaian</u>: Ada beberapa cara penggambaran

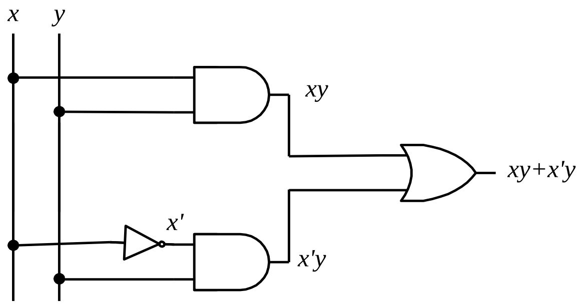
Cara pertama:



Cara kedua:

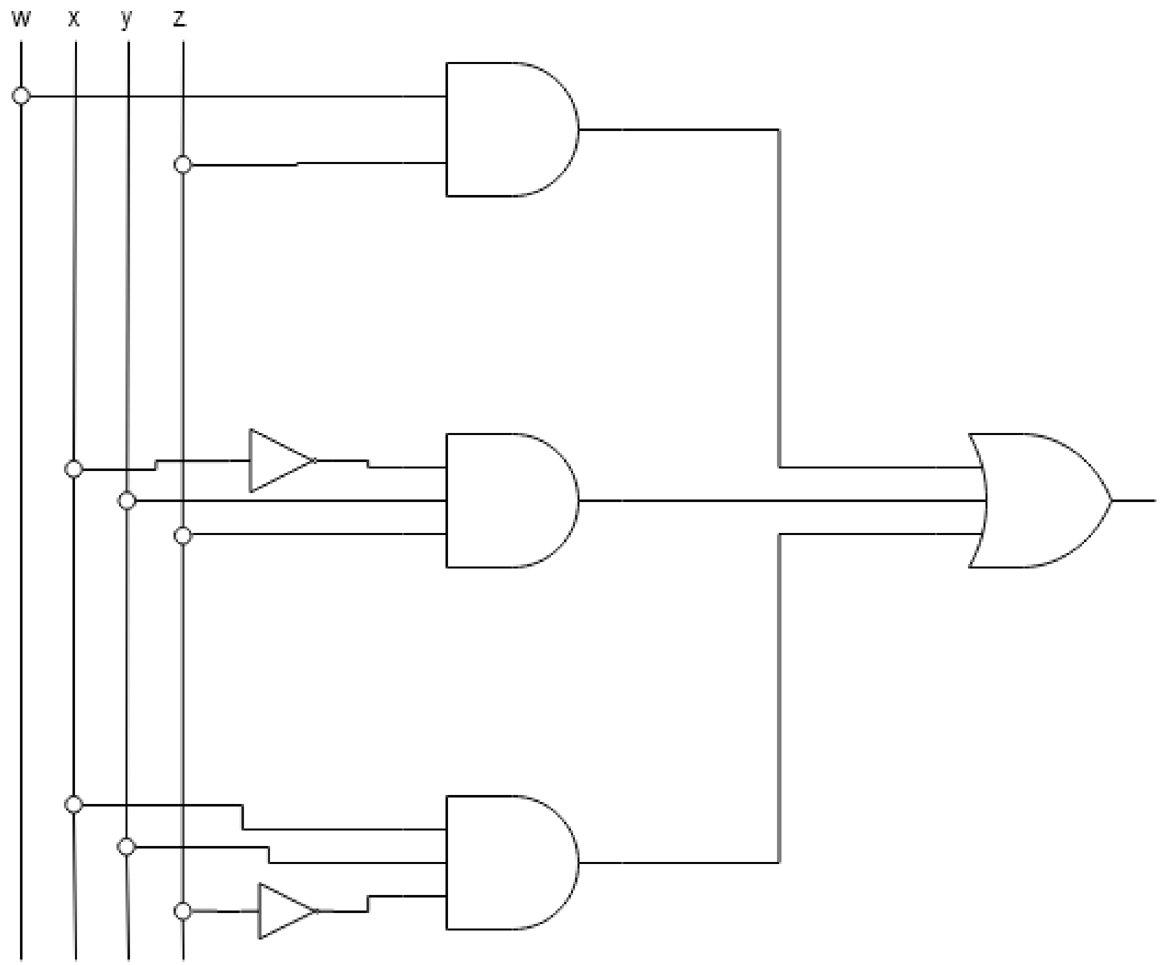


Cara ketiga:

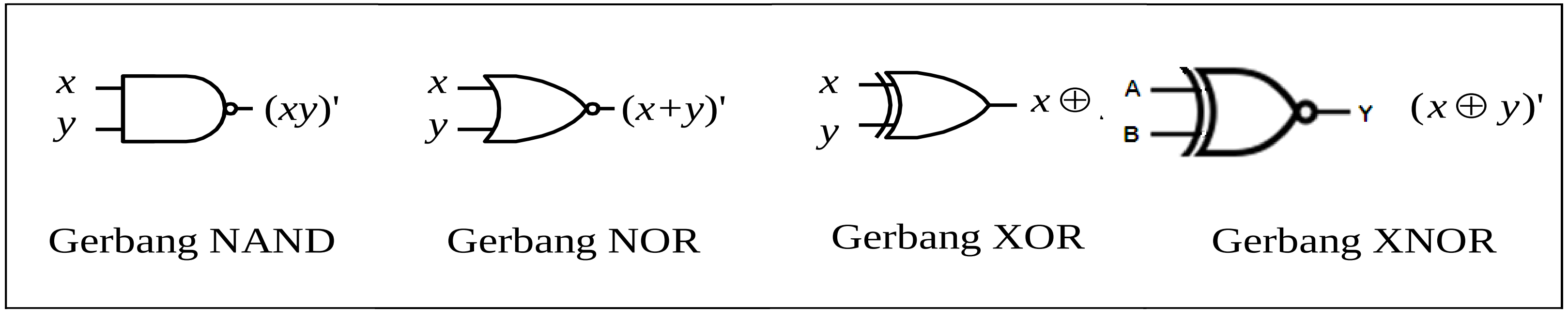


Contoh 9. Nyatakan f(w, x, y, z) = wz + x'yz + xyz' dalam rangkaian logika

Jawaban:



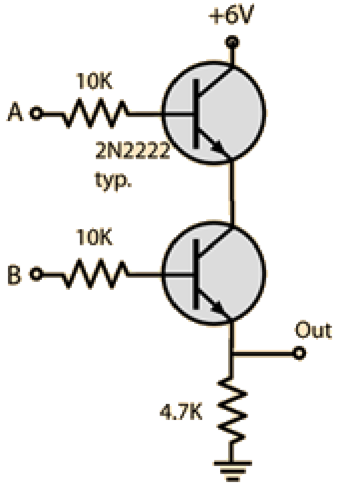
- Gerbang logika turunan: NAND, NOR, XOR, dan XNOR



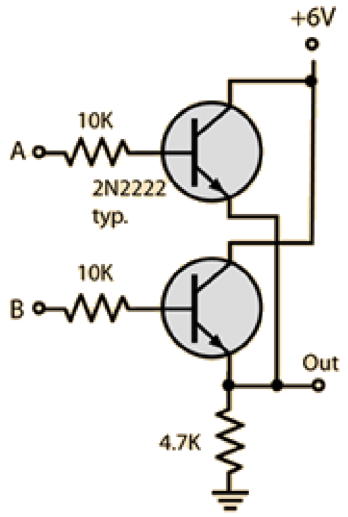
Keempat gerbang di atas merupakan kombinasi dari gerbang-gerbang dasar, misalnya gerbang NOR disusun oleh kombinasi gerbang OR dan gerbang NOT:

Selain itu, dengan menggunakan hukum De Morgan, kita juga dapat membuat gerbang logika yang ekivalen dengan gerbang NOR dan NAND di atas:

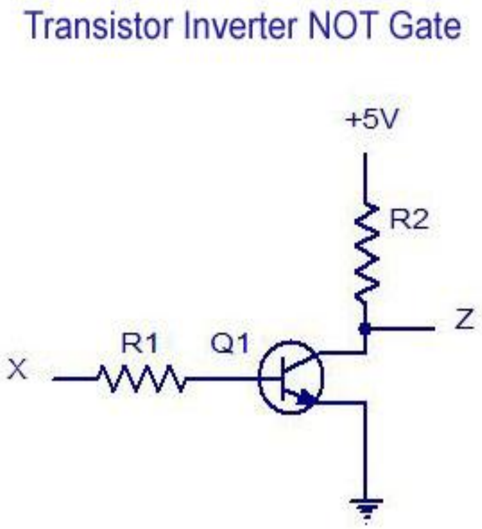
Transistor untuk gerbang logika



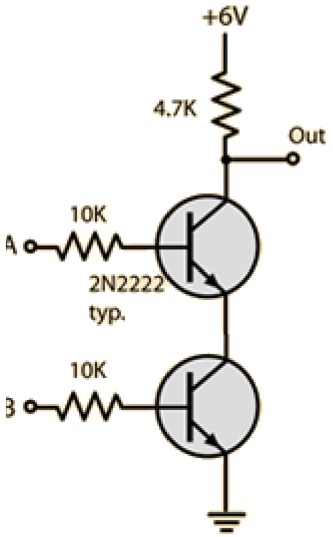
AND



OR



NOT



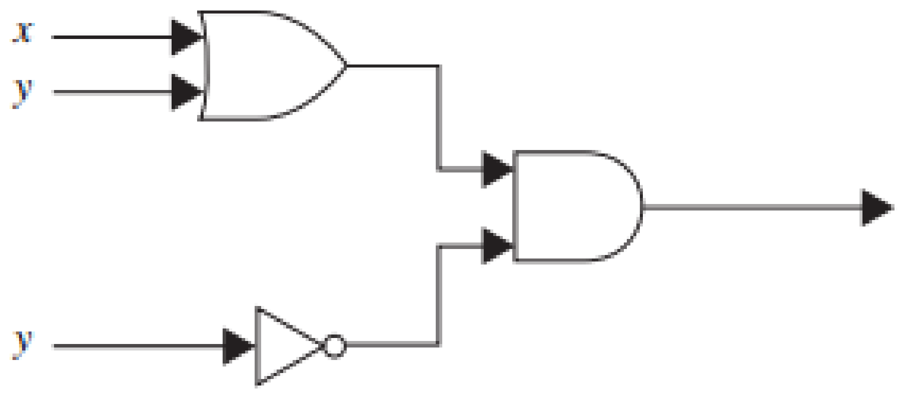
NAND

Sumber gambar: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electronic/trangate.html#c3

Latihan (2015)

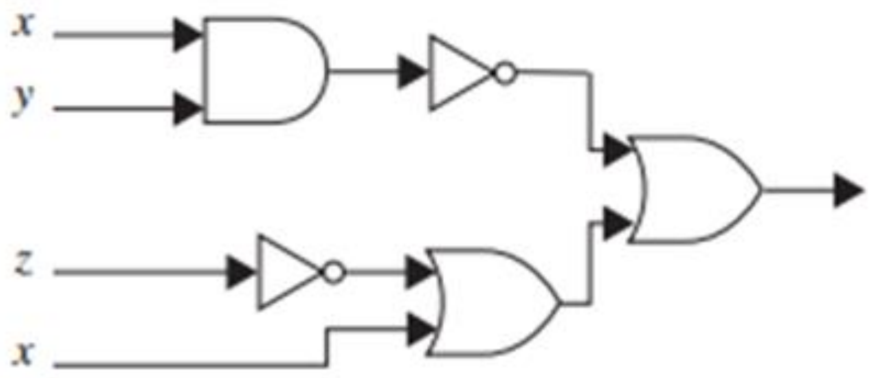
Carilah keluaran dari rangkaian-rangkaian logika berikut!

a)



(x+y)y' = xy'

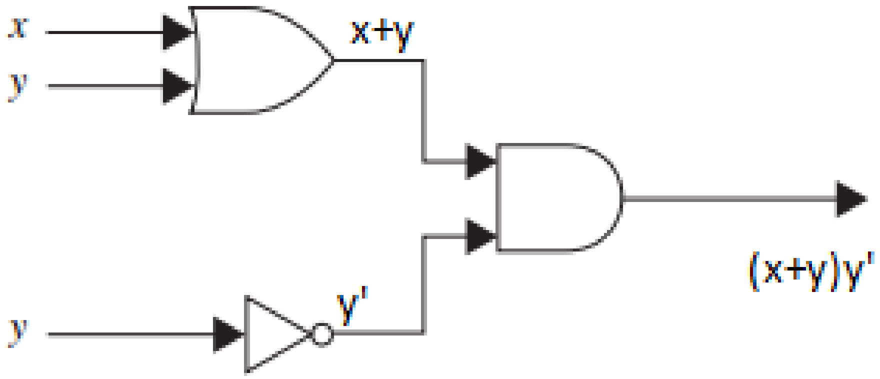
b)



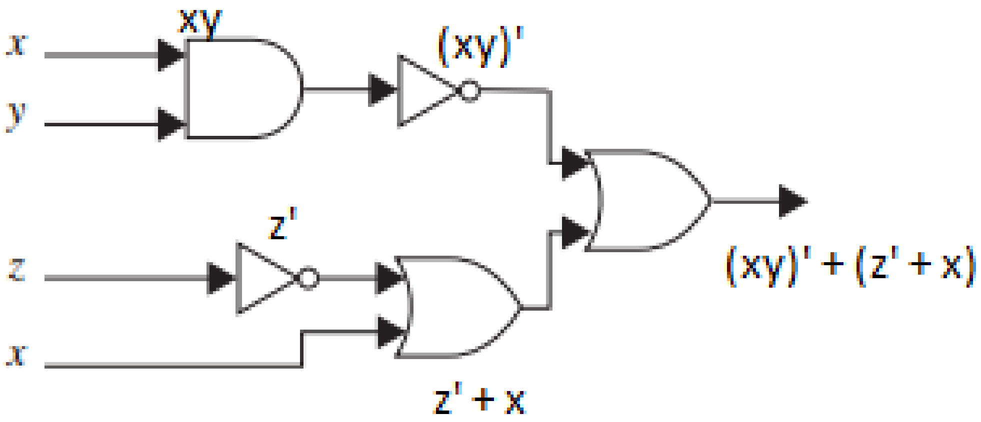
(xy)' + (z' + x)

Jawaban:

a)



b)



Latihan

Sistem penerangan jalan mengatur nyala atau tidaknya lampu berdasarkan tiga faktor, yaitu *switch*/tombol, *timer*, dan sensor cahaya. Ketika *switch* dinyalakan, lampu pasti akan menyala. Ketika *switch* tidak dinyalakan, lampu akan menyala hanya jika *timer* menunjukkan waktu malam dan sensor cahaya menangkap sedikit cahaya. Buatlah fungsi Boolean dan rangkaian logika untuk sistem penerangan jalan ini dengan permisalan x sebagai *switch*, y sebagai *timer*, dan z sebagai sensor cahaya!

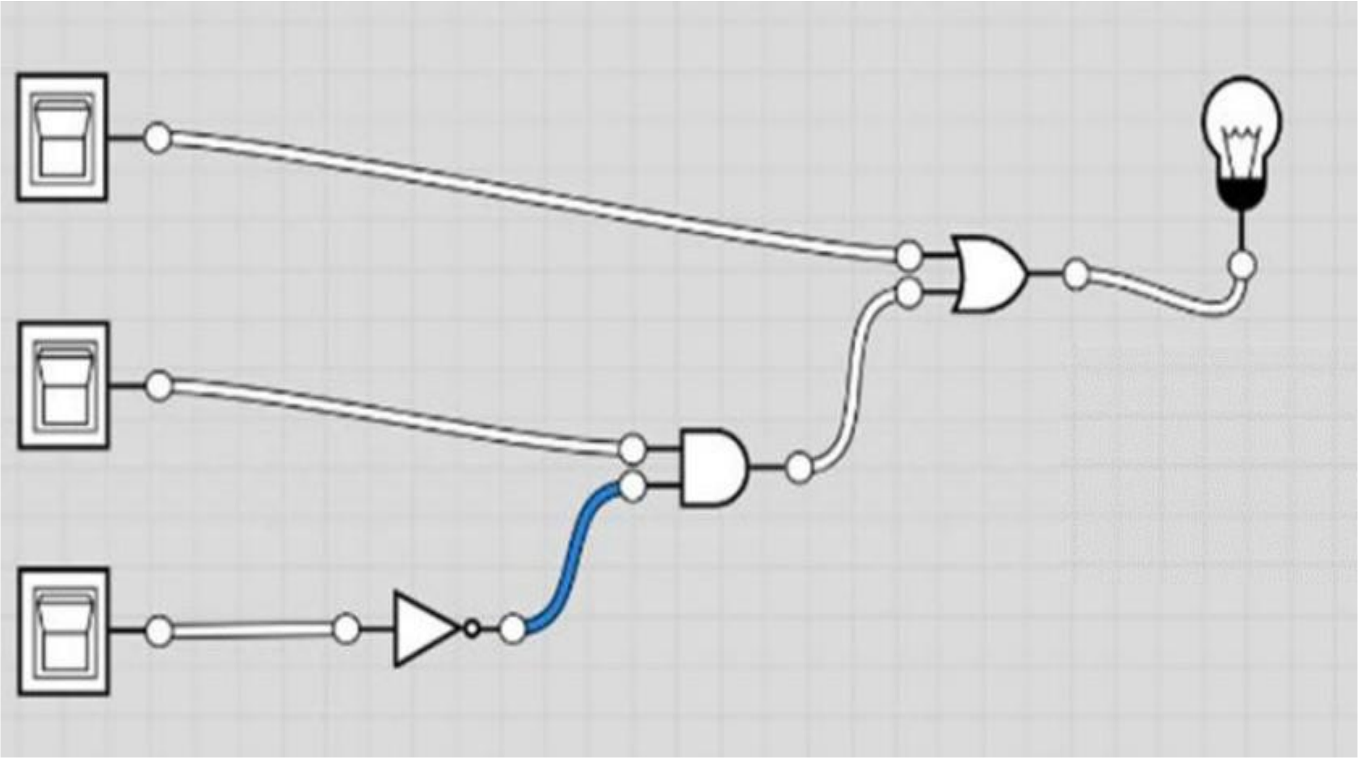
Jawaban:

- x = *Switch*, bernilai 1 jika dinyalakan dan bernilai 0 jika dimatikan
- y = *Timer*, bernilai 1 jika malam hari dan bernilai 0 jika siang hari
- z = Sensor cahaya, bernilai 1 jika menangkap banyak cahaya dan bernilai 0 jika menangkap sedikit cahaya

Karena ketika *switch* dinyalakan lampu pasti akan menyala, maka berlaku f(x,y,z) = x.

Ketika *switch* dimatikan, lampu akan menyala hanya jika timer menunjukkan malam hari dan sensor cahaya menangkap sedikit cahaya, maka berlaku **f(x,y,z) = x + yz’**.

Sehingga, susunan rangkaian logika dari fungsi Boolean tersebut adalah



Bersambung ke Bagian 2