Seri bahan kuliah Algeo 21

Singular Value Decomposition (SVD)

(Bagian 1)

Update 2023

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Dekomposisi Matriks

- Mendekomposisi matriks artinya memfaktorkan sebuah matriks, misalnya A, menjadi hasil kali dari sejumlah matriks lain, $P_1, P_2, \ldots, P_k$

$$A = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$$

- Terdapat beberapa metode mendekomposisi matriks:

1. Metode dekomposisi LU *)
2. Metode dekomposisi QR
3. Metode dekomposisi nilai singular (*singular value decomposition* – SVD) *)

*) yang dibahas di dalam kuliah ini

LU decomposition

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

A L U

L = matriks segitiga bawah (*lower triangular matrix*),
U = matriks segitiga atas (*upper triangular matrix*)

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{bmatrix}$$

QR decomposition

$$\overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}} = \underbrace{\overset{\mathbf{Q}}{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}}_{\text{Orthogonal Unit vectors}} \underbrace{\overset{\mathbf{R}}{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_3 \\ 0 & \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{a}_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3^T \cdot \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}}_{\text{Upper Diagonal Matrix}}$$

Contoh:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 2.5 & 1.1 & 0.3 \\ 2.2 & 1.9 & 0.4 \\ 1.8 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}} = \overset{Q}{\begin{pmatrix} -0.7 & 0.1 & -0.7 \\ -0.6 & -0.7 & 0.4 \\ -0.5 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}} \overset{R}{\begin{pmatrix} -3.8 & -1.9 & -0.6 \\ 0. & -1.1 & 0. \\ 0. & 0. & 0.1 \end{pmatrix}}$$

Singular Value Decomposition (SVD)

- Di dalam materi nilai eigen dan vektor eigen, pokok bahasan diagonalisasi, kita sudah mempelajari bahwa matriks bujursangkar A berukuran n x n dapat difaktorkan menjadi:

$$A = PDP^{-1}$$

yang dalam hal ini,

- P adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah basis ruang eigen dari matriks A,

$$P = (p_1 \mid p_2 \mid \ldots \mid p_n)$$

- D adalah matriks diagonal sedemikian sehingga

$$D = P^{-1}AP$$

- Bagaimana cara memfaktorkan matriks non-bujursangkar berukuran m x n (yang tidak memiliki nilai eigen)? tidak bisa, karena tidak ada nilai eigen

- Untuk matriks non-bujursangkar, pemfaktorannya menggunakan metode *singular decomposition value* (SVD)

- SVD memfaktorkan matriks A berukuran m x n menjadi matriks U, Σ, dan V sedemikian sehingga

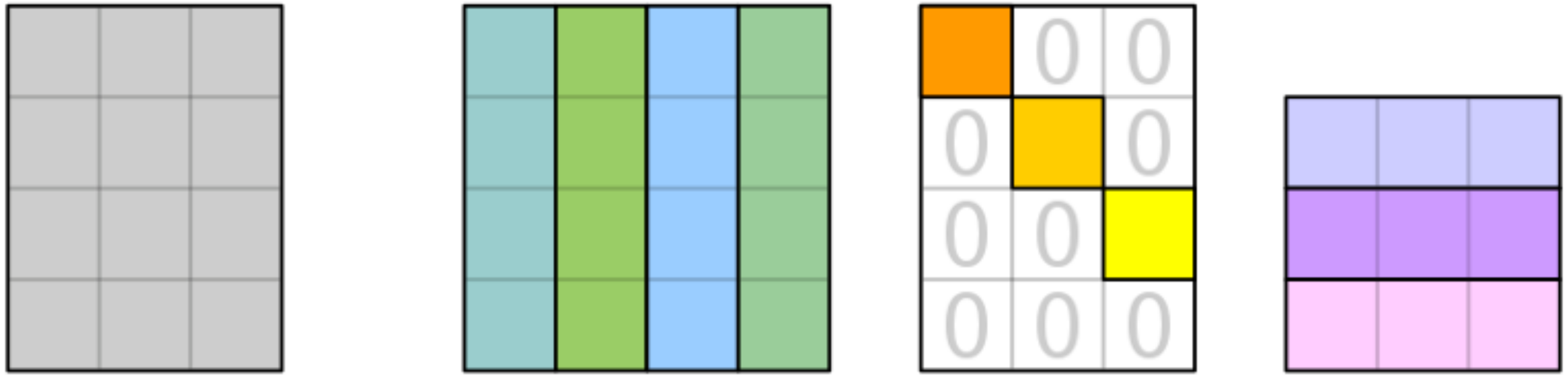
$$A = U\Sigma V^T \qquad (1)$$

U = matriks ortogonal m x m,

V = matriks orthogonal n x n

Σ = matriks berukuran m x n yang elemen-elemen diagonal utamanya adalah nilai-nilai singular dari matriks A sedangkan elemen lainnya 0

Matriks ortogonal adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor yang saling orthogonal satu sama lain (hasil kali titik sama dengan 0).



$$\underset{m\times n}{\mathbf{M}} = \underset{m\times m}{\mathbf{U}}\;\underset{m\times n}{\mathbf{\Sigma}}\;\underset{n\times n}{\mathbf{V}^*}$$

matriks ortogonal (U) — matriks ortogonal (V^*)

- Apa yang dimaksud dengan matriks ortogonal?
- Apa yang dimaksud dengan diagonal utama matriks m x n?

Penjelasannya pada halaman berikut ini!

Matriks ortogonal

- **Matriks ortogonal** adalah matriks persegi yang kolom-kolomnya adalah vektor yang saling ortogonal satu sama lain (hasil kali titik sama dengan 0).

Contoh: Matriks-matriks berikut adalah matriks ortogonal (tunjukkan!)

$(0,0,-1)\cdot(0,1,0) = 0$

$(1,0,0)\cdot(0,0,-1) = 0$

$(1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$

- Jika vektor-vektor kolom tersebut merupakan vektor satuan, maka matriks ortogonal tersebut dinamakan juga **matriks ortonormal**.

  Ingatlah kembali, vektor satuan adalah vektor yang memiliki *magnitude* = 1.

  Contoh: Matriks berikut adalah matriks ortonomal

a) $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

- Jika Q adalah matriks ortogonal berukuran n x n maka

$$Q^TQ = QQ^T = I$$

  yang dalam hal ini I adalah matriks identitas berukuran n x n.

mis $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \overset{\text{ortogonal}}{(4,-1)\cdot(1,4) = 0}$

bukan ortonormal krn magnitude: $\sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{17} \neq 1$

$h = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{-1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} \rightarrow$ ortogonal sekaligus ortonormal *column vectors* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *of* Q *are orthogonal* :

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

The orthogonal matrix $Q = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \ldots \\ v_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_2 & \ldots & v_1^T v_n \\ v_2^T v_1 & v_2^T v_2 & \ldots & v_2^T v_n \\ \ldots & & & \\ v_n^T v_1 & v_n^T v_2 & \ldots & v_n^T v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore Q^{-1} = Q^T$$

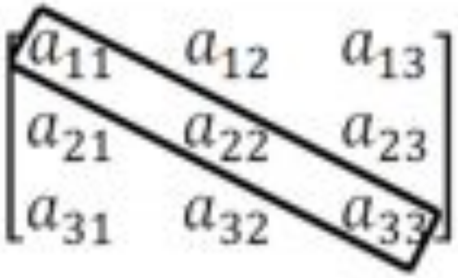
hrs ortogonal &
ortonormal

ere den ire

Contoh:

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

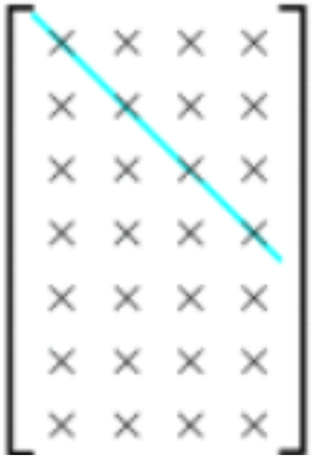
$$Q^TQ = \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{bmatrix}}_{\text{hrsnya di transpose}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Diagonal utama matriks m xn

- Diagonal utama sebuah matriks biasanya didefinisikan pada matriks persegi (matriks bujursangkar) berukuran n x n.

- Untuk matriks yang bukan bujursangkar, yaitu matriks m x n, diagonal utama matriks didefinisikan pada garis yang dimulai dari sudut kiri atas terus ke bawah matriks sejauh mungkin.



Nilai-nilai singular matriks

- Misalkan A adalah matriks m x n. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A^TA, maka

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1},\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2},\ \ldots,\ \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

disebut **nilai-nilai singular** dari matriks A.

- Diasumsikan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ sehingga $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$

Teorema

If A is an $m \times n$ matrix, then:

(a) A^TA is orthogonally diagonalizable.

(b) The eigenvalues of A^TA are nonnegative.

Contoh 1: Tentukan nilai-nilai singular matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A^T A)\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1 = 0$$

Persamaan karakteristik: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$

Nilai-nilai eigen dari $A^T A$ adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$

Jadi, nilai-nilai singular matriks A (dalam urutan dari besar ke kecil)

adalah: akar dr nilai eigen

$$\sigma_1 = \sqrt{3} \text{ dan } \sigma_2 = \sqrt{1}$$

$$A = U\Sigma V^T$$

Vektor-vektor singular kiri

Nilai-nilai singular

Vektor-vektor singular kanan

Dekomposisi SVD

- Jika A adalah matriks m x n dengan rank k, maka A dapat difaktorkan menjadi

$$A = U\Sigma V^T = \left[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m\right] \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & 0_{(m-k)\times(n-k)} \\ & 0_{(m-k)\times k} & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \\ \hline \mathbf{v}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right] \qquad (2)$$

- U adalah matriks m x m, $\sum$ adalah matriks m x n, dan V adalah matriks n x n
- $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$ disebut **vektor-vektor singular kiri** dari matriks A
- $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$ disebut **vektor-vektor singular kanan** dari matriks A
- $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$, …, $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ adalah nilai-nilai singular dari A, dan λ_1, λ_2, …, λ_k adalah nilai-nilai eigen dari A^TA

$$A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m] \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & 0_{(m-k)\times(n-k)} \\ & 0_{(m-k)\times k} & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \\ \hline \mathbf{v}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right]$$

- $V = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}]$ secara ortogonal mendiagonalisasi A^TA
- Vektor-vektor kolom di dalam V diurut sedemikian sehingga $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k > 0$
- $\mathbf{u}_i = \dfrac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \dfrac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$
- $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}\}$ adalah basis ortonormal untuk col(A)
- $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{u_{k+1}}, \ldots, \mathbf{u_m}\}$ adalah perluasan dari $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}\}$ untuk membentuk basis ortonormal ruang vektor R^m.

THEOREM 9.5.4 Singular Value Decomposition (Expanded Form)

If A is an $m \times n$ matrix of rank k, then A can be factored as

$$A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m] \left[\begin{array}{ccccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & & 0_{(m-k)\times(n-k)} \\ & 0_{(m-k)\times k} & & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \\ \hline \mathbf{v}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right]$$

in which U, Σ, and V have sizes $m \times m$, $m \times n$, and $n \times n$, respectively, and in which

(a) $V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$ orthogonally diagonalizes A^TA.

(b) The nonzero diagonal entries of Σ are $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$, where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ are the nonzero eigenvalues of A^TA corresponding to the column vectors of V.

(c) The column vectors of V are ordered so that $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k > 0$.

(d) $\mathbf{u}_i = \dfrac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \dfrac{1}{\sigma_i}A\mathbf{v}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$

(e) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *is an orthonormal basis for* col(A)}.

(f) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *is an extension of* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ to an ortho-normal basis for R^m.

The vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ are called the ***left singular vectors*** of A, and the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ are called the ***right singular vectors*** of A.

Ada dua cara untuk menghitung SVD:

Cara 1: Menggunakan Teorema 9.5.4 di atas

Cara 2. Menggunakan perhitungan vektor singular kiri dan singular kanan secara terpisah

Cara 1:

1. Tentukan vektor-vektor singular kanan $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ yang berkoresponden dengan nilai-nilai eigen dari A^TA. Normalisasi $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ dengan cara setiap komponen vektornya dibagi dengan panjang vektor. Diperoleh matriks V. Transpose-kan matriks V sehingga menjadi V^T. Rank(A) = k = banyaknya nilai-nilai eigen tidak nol dari A^TA .
2. Tentukan vektor-vektor singular kiri $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$ dengan persamaan

$$\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i \quad , i = 1, 2, \ldots, k \qquad (3)$$

   Normalisasi $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$ dengan cara setiap komponen vektornya dibagi dengan panjang vektor
3. Jika n > k, maka perluas perluaslah $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}\}$ untuk membentuk

   basis ortonormal untuk R^m
4. Bentuklah matriks $\sum$ berukuran m x n dengan elemen-elemen diagonalnya adalah nilai-nilai singular tidak nol dari matriks A dengan susunan dari besar ke kecil. Nilai singular di dalam $\sum$ adalah akar pangkat dua dari nilai-nilai eigen yang tidak nol dari A^TA.
5. Maka, $A = U\sum V^T$

Contoh 2: Faktorkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dengan metode SVD.

<u>Penyelesaian</u>:

(1) Hitung vektor-vektor singular kanan $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ sebagai berikut:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari A^TA adalah $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 10$ dan $\lambda_3 = 0$ (terurut dari besar ke kecil).
Rank(A) = 2, yaitu banyaknya nilai-nilai eigen tidak nol dari A^TA .
Nilai-nilai singular dari nilai eigen yang tidak nol adalah $\sigma_1 = \sqrt{12}$, $\sigma_2 = \sqrt{10}$
Periksalah bahwa vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen tersebut adalah:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 : 12$ $\lambda_2 : 10$ $\lambda_3 : 0$

Normalisasi $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$:

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{(2,-1,0)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{v}}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{(1,2,-5)}{\sqrt{30}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

Matriks V adalah:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix} \text{ sehingga } V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

(2) Menentukan vektor-vektor singular kiri $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{A\mathbf{v}_1}{\|A\mathbf{v_1}\|} = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{A\mathbf{v}_2}{\|A\mathbf{v_2}\|} = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

Normalisasi $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$ dengan cara setiap komponen vektornya dibagi dengan panjang vektor:

Normalisasi $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$: $\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{(\sqrt{3},\sqrt{3})}{\sqrt{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ dan $\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Diperoleh matriks U:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

(3) Matriks Σ yang berukuran 2 x 3 adalah $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$

(6) Jadi,

$$A = U \Sigma V^T$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ 2 \times 3}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{\substack{U \\ 2 \times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\Sigma \\ 2 \times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}}_{\substack{V^T \\ 3 \times 3}}$$

Verifikasilah dengan mengalikan ketiga matriks U, Σ, dan V^T tersebut menghasilkan matriks A , lihat pada halaman berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{24}}{2} & \frac{\sqrt{20}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{24}}{2} & -\frac{\sqrt{20}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{144}}{12} + \frac{2\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{6} - \frac{\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{12} + 0 + 0 \\ \frac{\sqrt{144}}{12} - \frac{2\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{6} + \frac{\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{12} + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{12} + \frac{20}{10} + 0 & \frac{12}{6} - \frac{10}{10} + 0 & \frac{12}{12} + 0 + 0 \\ \frac{12}{12} - \frac{20}{10} + 0 & \frac{12}{6} + \frac{10}{10} + 0 & \frac{12}{12} + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti!

Contoh 3: Faktorkan matriks $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ dengan metode SVD.

Solution We showed in Example 1 that the eigenvalues of A^TA are $\lambda_1=3$ and $\lambda_2=1$ and that the corresponding singular values of A are $\sigma_1=\sqrt{3}$ and $\sigma_2=1$. We leave it for you to verify that

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

are eigenvectors corresponding to λ_1 and λ_2, respectively, and that $V=[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2]$ orthogonally diagonalizes A^TA. From part (*d*) of Theorem 9.5.4, the vectors

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2=\frac{1}{\sigma_2}A\mathbf{v}_2=(1)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

are two of the three column vectors of U. Note that $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$ are orthonormal, as expected. We could extend the set $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ to an orthonormal basis for R^3. However, the computations will be easier if we first remove the messy radicals by multiplying $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$ by appropriate scalars. Thus, we will look for a unit vector $\mathbf{u}_3$ that is orthogonal to

$$\sqrt{6}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \sqrt{2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

To satisfy these two orthogonality conditions, the vector $\mathbf{u}_3$ must be a solution of the homogeneous linear system

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

We leave it for you to show that a general solution of this system is

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizing the vector on the right yields

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Thus, the singular value decomposition of A is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A \quad = \quad U \quad \Sigma \quad V^T$$

Latihan (Kuis 2021)

Diberikan sebuah matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Tentukan nilai-nilai singular dari matriks A
b. Berapakah rank(A)?
c. Tentukan hanya matriks Σ dan V saja dari faktorisasi A = $U\Sigma V^T$

(Jawaban pada halaman berikut ini)

Jawaban:

a. Untuk menentukan nilai-nilai singular, hitung

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A^TA)x) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 & 3 \\ -4 & \lambda - 5 & 3 \\ 3 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh nilai-nila eigen $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 0$

Nilai-nilai singular adalah $\sigma_1 = \sqrt{11} = 3.32$, $\sigma_2 = \sqrt{1}$, dan $\sigma_3 = 0$

b. Rank(A) = banyaknya nilai eigen yang tidak nol dari A^TA = 2

c. Matriks Σ adalah

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3.32 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks V adalah

$$V = \begin{bmatrix} -0.64 & -0.64 & 0.43 \\ 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.30 & -0.30 & 0.91 \end{bmatrix}$$

Catatan: urutan angka dan tanda di dalam V mungkin bisa berbeda tergantung cara memperoleh vektor eigen. Jawaban dianggap benar.

Soal latihan

1. Tentukan nilai-nilai singular dari matriks-matriks A berikut:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 0 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

2. Dekomposisilah matriks-matriks A pada soal 1 di atas dengan menggunakan metode SVD

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A^T A)x = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right|$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 5)^2 = 0$$

$$\lambda = 5, \quad \sigma = \sqrt{5}$$

Sumber:

1. Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Bersambung ke Bagian 2