

Seri bahan kuliah Algeo #15 - 2023

Ruang Vektor Umum

(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri


Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Pengantar

- Studi tentang vektor pada awalnya dimulai dengan menampilkan vektor sebagai ruas garis dengan tanda panah ().
- Vektor-vektor di ruang R^2 dan R^3 dinyatakan sebagai 2-tupel atau 3-tupel (yaitu (w_1, w_2) atau (w_1, w_2, w_3)) dan dapat digambarkan secara visual sebagai ruas garis pada sistem koordinat kartesian.
- Selanjutnya, pengertian vektor diperluas ke ruang R^n , dan sebuah vektor dinyatakan sebagai n-tupel, namun penggambaran secara visual menjadi tidak mungkin lagi.
- Konsep vektor di ruang R^n dapat diperluas sehingga berbagai objek matematika dapat diperlakukan sebagai vektor asalkan memenuhi sejumlah aksioma.

Ruang Vektor

- Yang dimaksud dengan **ruang vektor** (*vector space*) adalah himpunan objek-objek yang dilengkapi dengan dua operasi di dalam himpunan tersebut, yaitu:
 1. operasi penjumlahan objek-objek
 2. operasi perkalian objek dengan skalar
- \mathbb{R}^3 adalah contoh sebuah ruang vektor. Himpunan objeknya adalah vektor-vektor yang dinyatakan sebagai $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Di dalam \mathbb{R}^3 didefinisikan operasi penjumlahan dua buah vektor, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, dan perkalian skalar $k\mathbf{v}$ seperti yang sudah dipelajari sebelumnya.
- Namun, kita dapat memperlakukan himpunan lain sebagai ruang vektor asalkan memenuhi persyaratan yang dijelaskan pada *slide* berikut.

Ruang Vektor

Sebuah himpunan objek-objek V yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar dapat disebut sebagai **ruang vektor** dan semua objek di dalam V disebut **vektor**, apabila memenuhi 6 aksioma berikut ini:

1. Tertutup (*closure*)

Operasi penjumlahan dan perkalian skalar selalu menghasilkan vektor di dalam V .

Jadi, untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dan skalar k , maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$$

$$k\mathbf{u} \in V$$

2. Komutatif

Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

3. Asosiatif

Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, maka $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

4. Identitas

Untuk semua $\mathbf{u} \in V$, terdapat elemen identitas (vektor) $\mathbf{0}$ dan skalar 1 sedemikian sehingga

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

5. Balikan (*inverse*) atau negatif

Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$, terdapat $-\mathbf{u} \in V$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

6. Distributif

Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan k, m skalar, maka

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$(k + m)\mathbf{w} = k\mathbf{w} + m\mathbf{w}$$

$$k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$$

- Enam (6) aksioma tersebut dapat dirangkum menjadi 10 poin sebagai berikut:

1. If \mathbf{u} and \mathbf{v} are objects in V , then $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is in V .
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. There is an object $\mathbf{0}$ in V , called a *zero vector* for V , such that $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for all \mathbf{u} in V .
5. For each \mathbf{u} in V , there is an object $-\mathbf{u}$ in V , called a *negative* of \mathbf{u} , such that $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. If k is any scalar and \mathbf{u} is any object in V , then $k\mathbf{u}$ is in V .
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
8. $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u}) = (km)(\mathbf{u})$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Cara menunjukkan apakah sebuah himpunan dengan dua operasi merupakan ruang vektor

1. Identifikasi himpunan V dengan objek-objek di dalamnya yang akan menjadi vektor
2. Identifikasi operasi penjumlahan dan perkalian skalar di dalam V
3. Periksa aksioma 1 (tertutup terhadap operasi penjumlahan dan tertutup terhadap operasi perkalian skalar)
4. Periksa apakah lima aksioma lainnya dipenuhi

Contoh-contoh Ruang Vektor

1. \mathbb{R}^n (termasuk \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3) adalah ruang vektor

- $V = \mathbb{R}^n$ = himpunan objek berbentuk $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i \in \mathbb{R}$
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dan perkalian skalar menghasilkan vektor dengan n-tupel di \mathbb{R}^n .
- Lima aksioma lainnya: komutatif, identitas, asosiatif, distributif, balikan, juga dipenuhi oleh \mathbb{R}^n (periksa!)

2. Ruang vektor matriks 2 x 2

- V = himpunan matriks berukuran 2 x 2 dengan elemen-elemen bilangan riil adalah ruang vektor, dilambangkan dengan M_{22}
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$k\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dan perkalian skalar menghasilkan matriks yang berukuran 2 x 2 juga
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya

- komutatif $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

- elemen identitas adalah $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

- kemudian, $1\mathbf{u} = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

- balikan atau negatif: terdapat $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$ sehingga

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- periksa bahwa aksioma asosiatif dan distributif juga dipenuhi, yaitu jika \mathbf{u} , \mathbf{v} , dan \mathbf{w} adalah matriks 2×2 , maka

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

dan jika k dan m adalah skalar maka

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$(k + m)\mathbf{w} = k\mathbf{w} + m\mathbf{w}$$

$$k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$$

3. Ruang vektor matriks $m \times n$

- Sebagai perampatan dari ruang vektor matriks 2×2 , maka V = himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen bilangan riil juga adalah ruang vektor
- Dilambangkan dengan M_{mn}

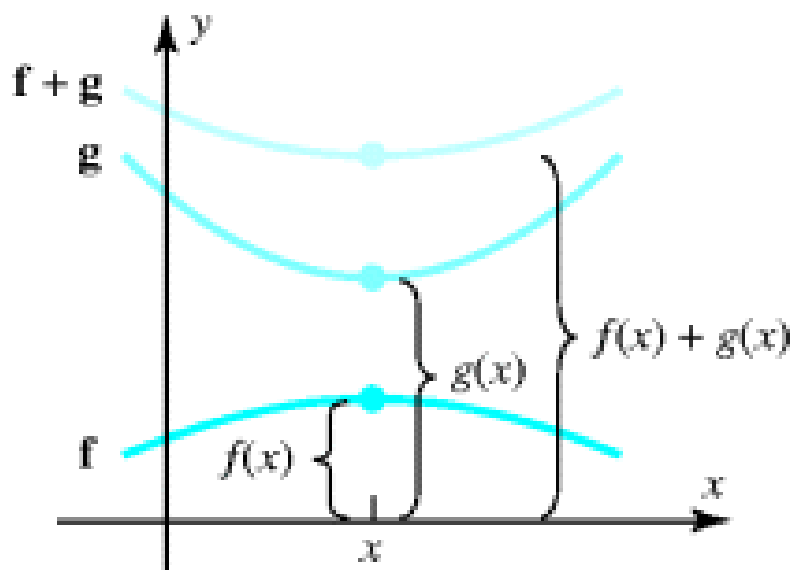
4. Ruang vektor fungsi-fungsi bernilai bilangan riil

- V = himpunan semua fungsi bernilai bilangan riil untuk setiap x di dalam selang $(-\infty, \infty)$. Elemen himpunan V adalah fungsi berbentuk $f(x)$
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb: jika $f = f(x)$ dan $g = g(x)$, maka

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

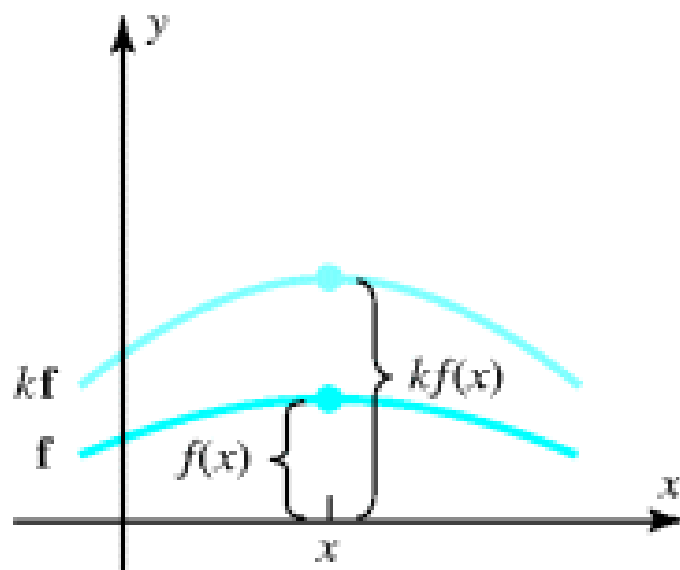
$$(kf)(x) = kf(x)$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dua buah fungsi dan perkalian skalar fungsi menghasilkan fungsi lain yang juga di dalam V yang terdefinisi untuk x di dalam $(-\infty, \infty)$
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya
 - komutatif: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$
 - elemen identitas adalah 0 sehingga $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$
 - negatif fungsi adalah $-f(x)$ sehingga $f(x) + (-f(x)) = 0 = (-f(x)) + f(x)$



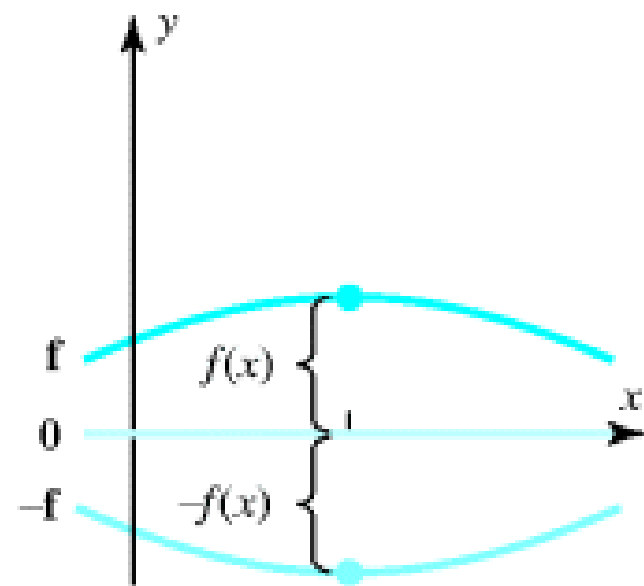
(a)

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$



(b)

$$(kf)(x) = kf(x)$$



(c)

$$f(x) + (-f(x)) = 0 = (-f(x)) + f(x)$$

4. Ruang vektor polinom

- V = himpunan semua polinom berbentuk $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ untuk setiap x di dalam selang $(-\infty, \infty)$.
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb: jika $\mathbf{p} = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ dan $\mathbf{q} = q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ maka

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$k\mathbf{p} = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \dots + ka_nx^n$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dua buah polinom dan perkalian skalar polinom menghasilkan polinom lain yang juga di dalam V yang terdefinisi untuk x di dalam $(-\infty, \infty)$
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya
 - komutatif: $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$
 - elemen identitas adalah 0 sehingga $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$
 - negatif polinom adalah $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n$ sehingga $p(x) + (-p(x)) = 0 = (-p(x)) + p(x)$

Contoh yang bukan ruang vektor

Misalkan $V = \mathbb{R}^2$ = himpunan objek berbentuk $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $u_i \in \mathbb{R}$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar di dalam V sbb:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$k\mathbf{u} = (ku_1, 0)$$

Contoh: misalkan $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, 2)$ maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + 5, 4 + 2) = (8, 6)$$

$$8\mathbf{u} = (8 \cdot 3, 0) = (24, 0)$$

- Aksioma *closure* dipenuhi oleh ruang vektor ini
- Namun ruang vektor gagal memenuhi aksioma identitas, sebab

$$1\mathbf{u} = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Subruang

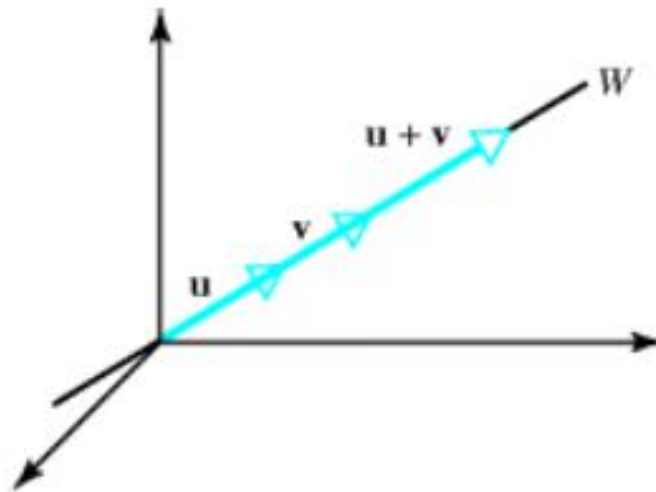
- Jika V adalah sebuah ruang vektor, maka sub-himpunan W dari V disebut **subruang** (*subspace*) jika W sendiri adalah ruang vektor di bawah operasi penjumlahan dan perkalian skalar

Contoh: $V = \mathbb{R}^3$, W = sebuah bidang yang melalui titik asal $(0, 0, 0)$

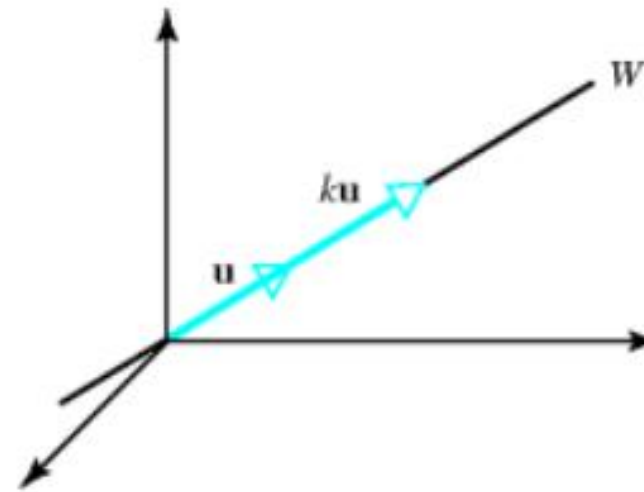
- **Teorema:** Jika W adalah himpunan yang berisi satu atau lebih vektor di dalam ruang vektor V , maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi:
 1. Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor di W , maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ menghasilkan vektor di W
 2. Jika k adalah skalar dan \mathbf{u} adalah vektor di W , maka $k\mathbf{u}$ adalah vektor di W

Contoh-contoh subruang

1. Himpunan titik-titik sepanjang garis yang melalui titik asal di \mathbb{R}^2 atau di \mathbb{R}^3 yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar adalah subruang dari \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 .



(a) W is closed under addition.



(b) W is closed under scalar multiplication.

2. Himpunan titik-titik pada bidang yang melalui titik asal di \mathbb{R}^3 yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar adalah subruang dari \mathbb{R}^3 .

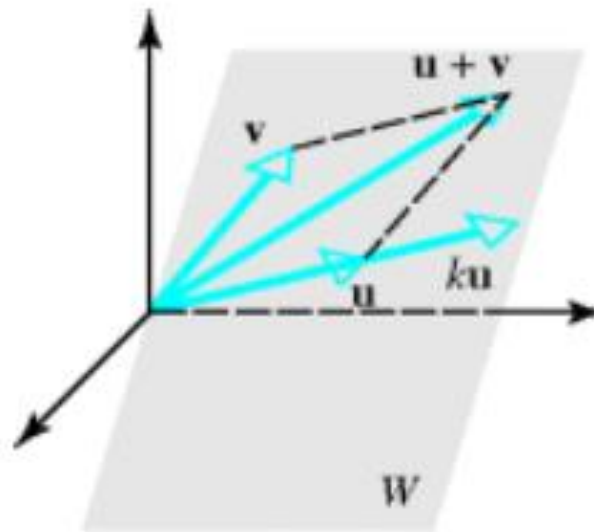


Figure 4.2.3 The vectors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ and $k\mathbf{u}$ both lie in the same plane as \mathbf{u} and \mathbf{v}

Contoh yang bukan subruang

- Himpunan titik-titik di dalam kuadran 1 pada bidang kartesian tidak membentuk subruang dari \mathbb{R}^2 karena tidak tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

Contoh: $\mathbf{v} = (1, 1)$ adalah vektor di W tetapi $(-1)\mathbf{v} = (-1, -1)$ terletak di luar W

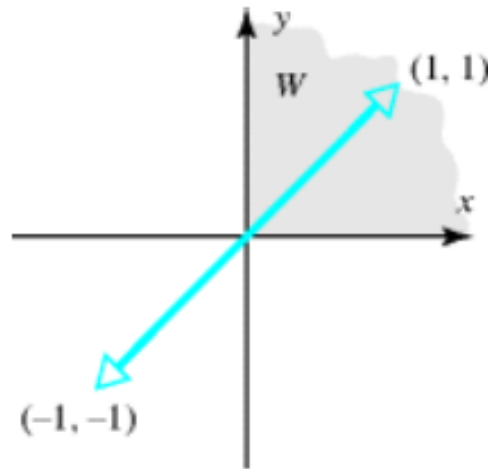


Figure 4.2.4 W is not closed under scalar multiplication

- Himpunan W yang berisi matriks $n \times n$ yang memiliki balikan (*invertible*) tidak membentuk subruang dari M_{nn} karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan scalar.

Contoh: $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $V = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$0U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriks ini tidak memiliki balikan}$$

$$U + V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \text{determinannya} = 0 \rightarrow \text{tidak memiliki balikan}$$

Kombinasi linier

- Jika \mathbf{w} adalah vektor di V , maka \mathbf{w} dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ apabila \mathbf{w} dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$$

yang dalam hal ini k_1, k_2, \dots, k_r adalah skalar.

Contoh 1: Misalkan $\mathbf{v}_1 = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 3)$, maka

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 2(3, 2, -1) + 3(2, -4, 3) = (12, -8, 7)$$

Contoh 2: Nyatakan vektor $(5, 9, 5)$ sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ dan $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$

Penyelesaian:

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linier (SPL):

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = 5$$

$$k_1 - k_2 + 2k_3 = 9$$

$$4k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 5$$

Selesaikan SPL di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

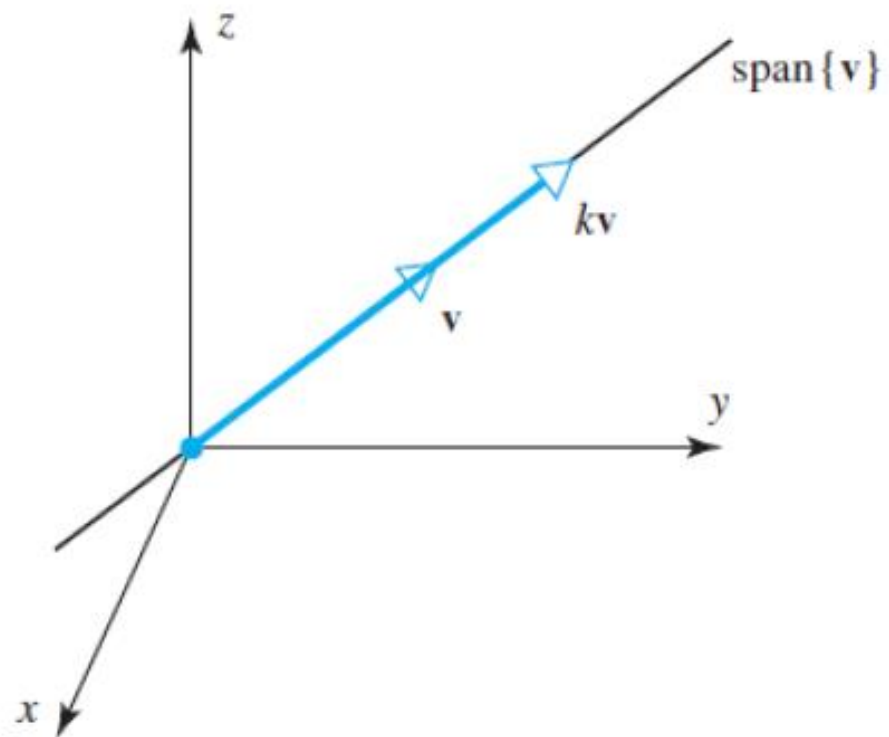
$$k_1 = 3, \quad k_2 = -4, \quad k_3 = 2$$

Teorema: Jika $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor V , maka

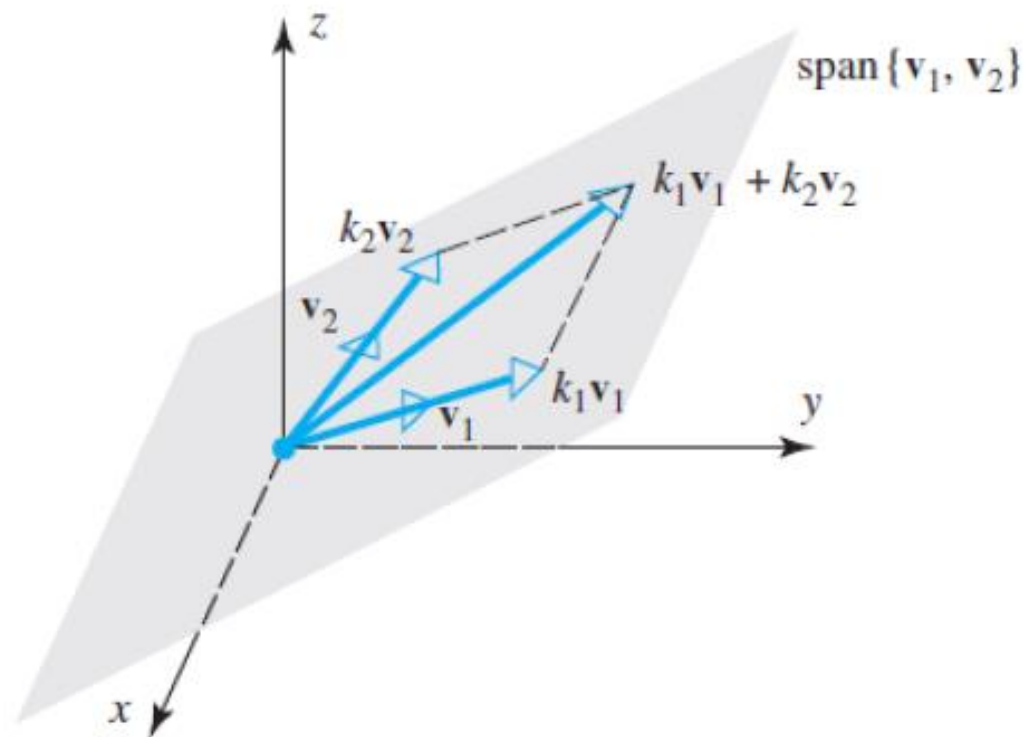
- (a) Himpunan W yang berisi semua kombinasi linier vektor-vektor di dalam S adalah subruang dari V
- (b) Himpunan W tersebut adalah subruang “terkecil” dari V yang mengandung vektor-vektor di dalam S dengan pengertian bahwa sembarang subruang lain yang mengandung vektor-vektor tersebut juga mengandung W .

Himpunan membangun (*spanning set*)

- Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ adalah vektor-vektor di dalam ruang vektor V dan subruang dari V dibentuk dari kombinasi linier $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ maka himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ dikatakan **membangun** (*span*) subruang tersebut.
- $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ disebut himpunan merentang atau himpunan membangun (*spanning set*).
- S membangun subruang maka kita menyatakannya sebagai $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ atau $\text{span}(S)$.
- Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ membangun V maka sembarang vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$



(a) $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ is the line through the origin determined by \mathbf{v} .



(b) $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is the plane through the origin determined by \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 .

Contoh 3: Vektor-vektor satuan standard $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ membangun \mathbb{R}^3 karena setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di \mathbb{R}^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Kita dapat menyatakan $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Contoh 4: Polinom $1, x, x^2, \dots, x^n$ membangun ruang vektor P_n , karena setiap polinom \mathbf{p} di dalam P_n dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linier dari $1, x, x^2, \dots, x^n$. Kita dapat menyatakan bahwa $P_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Contoh 5: Tentukan apakah $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$ dan $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$ membangun \mathbb{R}^3 ?

Penyelesaian: Kita harus menentukan apakah sembarang vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ di \mathbb{R}^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$

$$(u_1, u_2, u_3) = k_1(2, -1, 3) + k_2(4, 1, 2) + k_3(8, -1, 8)$$

Diperoleh SPL:

$$2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = u_1$$

$$-k_1 + k_2 - k_3 = u_2$$

$$3k_1 + 2k_2 + 8k_3 = u_3$$

Apakah SPL di atas dapat dipecahkan? Perhatikan matriks koefisien SPL, yaitu $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 20 - 40 = 0$$

Karena $\det(A) = 0$, maka SPL tersebut tidak konsisten, artinya tidak terdapat k_1, k_2 dan k_3 yang memenuhi. Oleh karena itu \mathbf{u} tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$. Dengan kata lain $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan \mathbf{v}_3 tidak membangun \mathbb{R}^3 .

Kebebasan linier (*linear independence*)

- Misalkan V adalah ruang vektor. Himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ dikatakan **bebas linier** (*linear independence*) jika dan hanya jika kombinasi linier

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

memiliki hanya satu solusi yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Solusi ini disebut **solusi trivial**.

- Sebaliknya, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ dikatakan **tidak bebas linier** atau **kebergantungan linier** (*linear dependence*) jika dan hanya jika kombinasi linier

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

memiliki **solusi non-trivial**, yaitu memiliki solusi lain selain $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$

Pengertian lain bebas linier dan tidak bebas linier adalah sbb:

Sebuah himpunan S yang memiliki dua atau lebih vektor dikatakan:

(a) **tidak bebas linier** (*linear dependence*) jika dan hanya jika sedikitnya satu vektor di dalam S adalah kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

tidak bebas linier = bergantung dengan vektor lain

(b) **bebas linier** (*linear independence*) jika tidak ada vektor di dalam S yang dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

bebas linier = tidak bergantung dengan vektor lain

Contoh 6: Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 5)$ dan $\mathbf{v}_3 = (4, 5, 11)$. Kita dapat memverifikasi bahwa

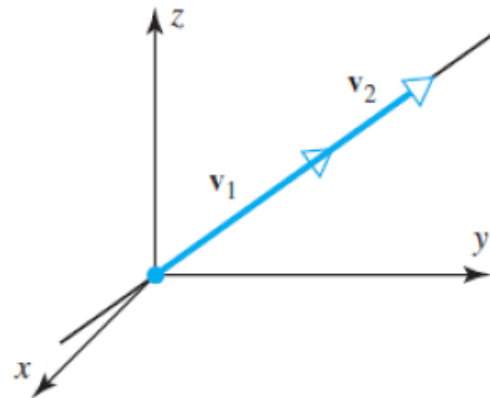
$$2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0 \rightarrow \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Karena $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ maka itu berarti \mathbf{v}_3 merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya. Dengan kata lain, \mathbf{v}_3 bergantung pada vektor-vektor lainnya di dalam S , sehingga himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dikatakan tidak bebas linier.

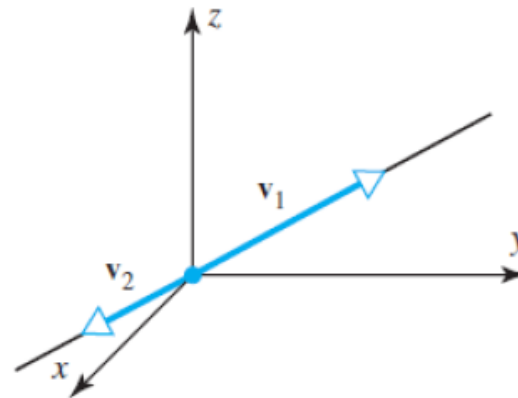
tidak bebas linier karena variabelnya saling bergantung

Contoh 7: Polinom $\mathbf{p}_1 = 1 - x$, $\mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2$, dan $\mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$ membentuk himpunan yang tidak bebas linier karena $3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = 0 \rightarrow \mathbf{p}_2 = 3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_3$, yang berarti \mathbf{p}_2 merupakan kombinasi linier dari polinom-polinom lainnya.

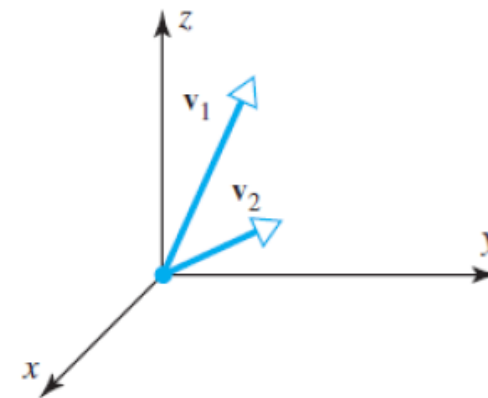
Linear Independence in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3



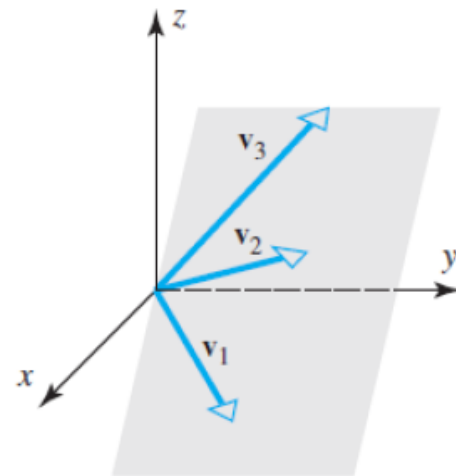
(a) Linearly dependent



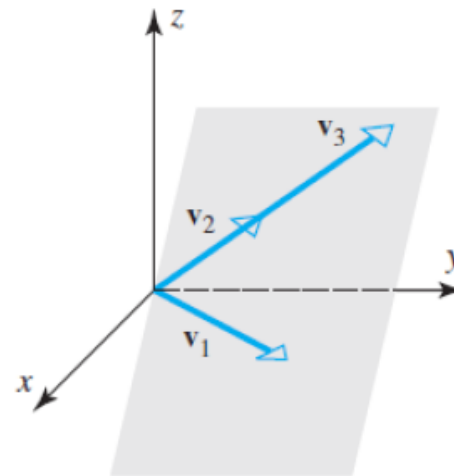
(b) Linearly dependent



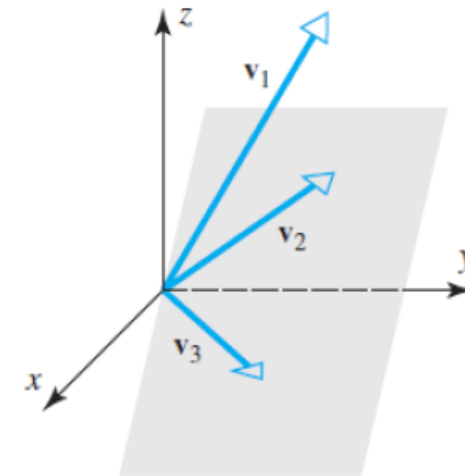
(c) Linearly independent



(a) Linearly dependent



(b) Linearly dependent



(c) Linearly independent

Contoh 8: Tentukan apakah $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 6, -1)$ dan $\mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$ membentuk himpunan yang bebas linier atau tidak bebas linier.

Penyelesaian: Kita harus memeriksa apakah kombinasi linier $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = 0$ memiliki solusi trivial atau non-trivial.

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL homogen di atas dengan metode eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \text{OBE} \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Solusi: } k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$$

(solusi trivial)

Karena kombinasi linier $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = 0$ mempunyai **solusi trivial** maka dikatakan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah himpunan yang bebas linier.

Contoh 9: Tentukan apakah $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 6, 2)$ dan $\mathbf{v}_3 = (1, 10, -1)$ membentuk himpunan yang bebas linier atau tidak bebas linier.

Penyelesaian: Kita harus memeriksa apakah kombinasi linier $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = 0$ memiliki solusi trivial atau non-trivial.

$$k_1(2, -1, 4) + k_2(3, 6, 2) + k_3(1, 10, -1) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0$$

$$-k_1 + 6k_2 + 10k_3 = 0$$

$$4k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$$

Selesaikan SPL homogen di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh solusinya:

$$k_1 = t, k_2 = -\frac{1}{2}t, k_3 = -\frac{1}{2}t$$

(Solusi non-trivial. Perhatikan bahwa jika $t = 0$, maka SPL memiliki solusi $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. Namun, ada banyak solusi yang lain selain $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$)

Karena kombinasi linier $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = 0$ mempunyai **solusi non trivial** maka dikatakan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah himpunan yang tidak bebas linier.

solusi banyak = tidak bebas linier

Catatan: Cara lain untuk memeriksa apakah SPL homogen

$$2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0$$

$$-k_1 + 6k_2 + 10k_3 = 0$$

$$4k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$$

memiliki solusi trivial atau non trivial adalah dengan menghitung determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Karena $\det(A) = 0$, maka SPL homogen tersebut memiliki solusi non-trivial.

Contoh 10: Vektor-vektor satuan standard $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ adalah vektor-vektor yang bebas linier di \mathbb{R}^3 . Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

atau

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = \mathbf{0}$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi solusinya $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ (solusi trivial)

Secara umum, vektor-vektor satuan standard di \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \text{ dan } \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1),$$

membentuk himpunan yang bebas linier di \mathbb{R}^n

Bersambung