

**Seri bahan kuliah Algeo #30**

# **Perkalian Geometri**

## **(Bagian 2)**

**Update 2023**

**Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri**

**Oleh: Rinaldi Munir**

**Program Studi Teknik Informatika**

**STEI-ITB**

**2023**

# Balikan (*inverse*) vektor

- Pada aljabar elementer,  $c = ab$  ( $a$  dan  $b$  bilangan riil) maka  $a = cb^{-1}$  atau  $b^{-1} = \frac{a}{c}$  (syarat  $c \neq 0$ )

- Pada aljabar geometri,  $B = ab$  ( $a$  dan  $b$  vektor,  $B$  multivektor), maka

$$Bb = (ab)b \quad (\text{kalikan kedua ruas dengan } b)$$

$$= ab^2$$

$$a = B \frac{b}{b^2} = B \frac{1}{b} = Bb^{-1}$$

$$a = Bb^{-1}$$

yang dalam hal ini

$$b^{-1} = \frac{b}{b^2} = \frac{b}{\|b\|^2}$$

→ balikan vektor  $b$

Contoh

1.  $a = 2e_1 + 5e_2$   
 $a^{-1} = \frac{a}{\|a\|^2} = \frac{2e_1 + 5e_2}{(4 + 25)} = \frac{2}{29}e_1 + \frac{5}{29}e_2$

2.  $B = 5 + 3e_{12}$   
 $a = 2e_1 + 5e_2$   
 $B = ab$   
 $b = ?$   
 $b = B^{-1}a = (5 + 3e_{12})^{-1}(2e_1 + 5e_2)$   
 $= \frac{10}{29}e_1 + \frac{25}{29}e_2 + \frac{6}{29}e_{12} + \frac{15}{29}e_{12}$   
 $= \frac{10}{29}e_1 + \frac{25}{29}e_2 + \frac{21}{29}e_{12}$

3.  $b = a^{-1}B$   
 $b = \frac{1}{29}(2e_1 + 5e_2)(5 + 3e_{12})$   
 $= \frac{10}{29}e_1 + \frac{25}{29}e_2 + \frac{6}{29}e_{12} + \frac{15}{29}e_{12}$   
 $= \frac{10}{29}e_1 + \frac{25}{29}e_2 + \frac{21}{29}e_{12}$

Jawaban benar :

$b = a^{-1}B$   
 $= \left(\frac{2}{29}e_1 + \frac{5}{29}e_2\right)(5 + 3e_{12})$   
 $= \frac{10}{29}e_1 + \frac{25}{29}e_2 + \frac{6}{29}e_{12} + \frac{15}{29}e_{12}$   
 $= \frac{10}{29}e_1 + \frac{25}{29}e_2 + \frac{21}{29}e_{12}$   
 $ab = (2e_1 + 5e_2)\left(-\frac{5}{29}e_1 + \frac{31}{29}e_2\right)$   
 $= -\frac{10}{29}e_1e_1 + \frac{62}{29}e_1e_2 + \frac{25}{29}e_2e_1 - \frac{155}{29}e_2e_2$   
 $= \frac{145}{29} + \frac{87}{29}e_{12}$   
 $= 5 + 3e_{12}$

**Contoh 4:** Diberikan vektor  $a$  dan  $b$ :  $a = 3e_1 + 4e_2$  dan  $b = e_1 + e_2$

Hitung  $B = ab$  dan balikan vektor  $b$ .

Jawaban:

$$\begin{aligned}(i) \quad B = ab &= (3e_1 + 4e_2)(e_1 + e_2) = 3e_1^2 + 3e_1e_2 + 4e_2e_1 + 4e_2^2 \\ &= 3 + 3e_{12} - 4e_{12} + 4 = 7 - e_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{atau pakai rumus: } ab &= a \cdot b + a \wedge b = (3)(1) + (4)(1) + \{(3)(1) - (4)(1)\} e_1 \wedge e_2 \\ &= 7 - e_{12} )\end{aligned}$$

$$(ii) \quad b^{-1} = \frac{b}{\|b\|^2} = \frac{e_1 + e_2}{(\sqrt{1^2 + 1^2})^2} = \frac{e_1 + e_2}{2} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

Periksa bahwa  $a$  dapat diperoleh kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}a = Bb^{-1} &= \frac{1}{2}(7 - e_{12})(e_1 + e_2) = \frac{1}{2}(7e_1 + 7e_2 - e_{12}e_1 - e_{12}e_2) \\ &= \frac{1}{2}(7e_1 + 7e_2 + e_2 - e_1) = 3e_1 + 4e_2\end{aligned}$$

# Operasi *meet*

- Operasi *meet* bertujuan untuk mencari perpotongan garis, bidang, volume, dll. lain.
- Notasi:  $A \vee B$
- Operasi *meet* didefinisikan sebagai berikut:

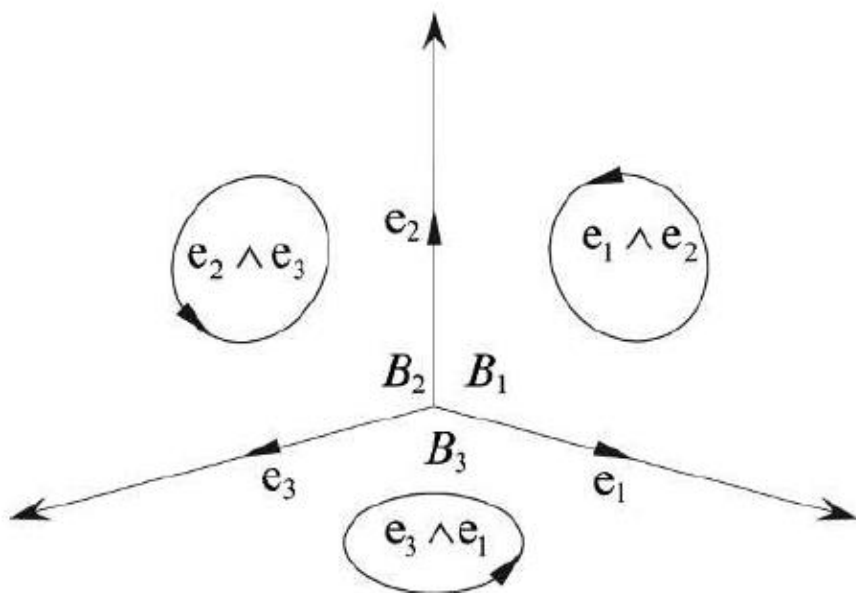
$$A \vee B = A^* \cdot B$$

yang dalam hal ini,  $A^*$  = pseudoscalar dari  $A = IA$

Contoh: (i)  $A = e_3 \rightarrow A^* = IA = e_{123}e_3 = e_{12}$

(ii)  $A = 2e_1 + e_3 \rightarrow A^* = IA = e_{123}(2e_1 + e_3) = 2e_{123}e_1 + e_{123}e_3 = 2e_{23} + e_{12}$

Perhatikan tiga bilah  $B_1$ ,  $B_2$ , dan  $B_3$  yang dibentuk oleh vektor-vektor satuan



$$B_1 = e_1 \wedge e_2$$

$$B_2 = e_2 \wedge e_3$$

$$B_3 = e_3 \wedge e_1$$

Perpotongan bilah  $B_1$  dan  $B_2$  adalah sumbu  $e_2 \rightarrow B_1 \vee B_2 = e_2$

Perpotongan bilah  $B_2$  dan  $B_3$  adalah sumbu  $e_3 \rightarrow B_2 \vee B_3 = e_3$

Perpotongan bilah  $B_1$  dan  $B_3$  adalah sumbu  $e_1 \rightarrow B_3 \vee B_1 = e_1$

- Akan ditunjukkan bahwa  $B_1 \vee B_2 = e_2$  dengan operasi *meet*:

$$\begin{aligned}
 B_1 \vee B_2 &= B_1^* \cdot B_2 \\
 &= (e_{123}e_{12}) \cdot e_{23} = (e_1e_2e_3e_1e_2) \cdot e_{23} = (-e_1^2e_2^2e_3) \cdot e_{23} \\
 &= -e_3 \cdot e_{23}
 \end{aligned}$$

dengan mengingat bahwa  $a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba)$  maka  $-e_3 \cdot e_{23}$  dapat dinyatakan sebagai

$$-e_3 \cdot e_{23} = \frac{1}{2}(-e_{323} + e_{233})$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 B_1 \vee B_2 &= \frac{1}{2}(-e_{323} + e_{233}) = \frac{1}{2}(e_3e_3e_2 + e_2e_3e_3) \\
 &= \frac{1}{2}(e_3^2e_2 + e_2e_3^2) = \frac{1}{2}(e_2 + e_2) = e_2
 \end{aligned}$$

(terbukti)

- Dengan cara yang sama, maka

$$\begin{aligned}
 B_2 \vee B_3 &= B_2^* \cdot B_3 \\
 &= (e_{123}e_{23}) \cdot e_{31} \\
 &= -e_1 \cdot e_{31} \\
 &= \frac{1}{2}(-e_{131} + e_{311})
 \end{aligned}$$

$$B_2 \vee B_3 = e_3$$

dan

$$\begin{aligned}
 B_3 \vee B_1 &= B_3^* \cdot B_1 \\
 &= (e_{123}e_{31}) \cdot e_{12} \\
 &= -e_2 \cdot e_{12} \\
 &= \frac{1}{2}(-e_{212} + e_{122})
 \end{aligned}$$

$$B_3 \vee B_1 = e_1.$$

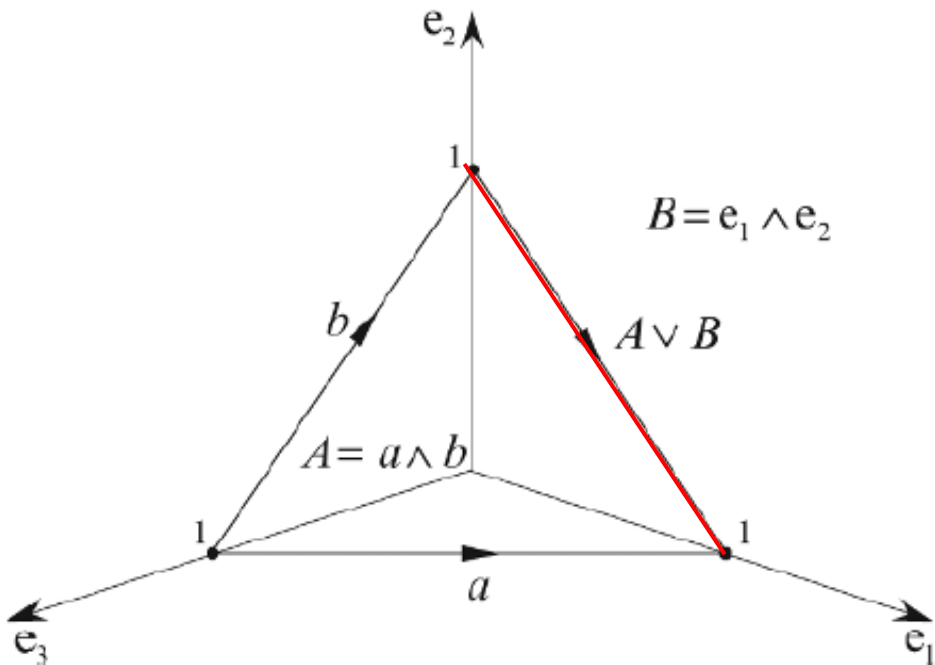
**Contoh 5:** Diberikan dua buah vektor  $a$  dan  $b$  sebagai berikut:

$$a = e_1 - e_3$$

$$b = e_2 - e_3$$

Tentukan perpotongan bidang  $A$  dan  $B$ , yang dalam hal ini  $A = a \wedge b$  dan  $B = e_{12}$

Jawaban:



$$A = a \wedge b$$

$$= (e_1 - e_3) \wedge (e_2 - e_3) = e_{12} - e_{13} - e_{32}$$

$$A \vee B = A^* \cdot B$$

$$= e_{123}(e_{12} - e_{13} - e_{32}) \cdot e_{12} = (-e_3 - e_2 - e_1) \cdot e_{12}$$

Gunakan  $a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba)$  maka

$$\begin{aligned} A \vee B &= \frac{1}{2}((-e_3 - e_2 - e_1)e_{12} - e_{12}(-e_3 - e_2 - e_1)) \\ &= e_1 - e_2 \quad (\text{garis yang berwarna merah}) \end{aligned}$$



# Latihan (Soal UAS 2019)

Diberikan tiga buah vektor sebagai berikut:

$$a = 2e_1 + e_2 - e_3$$

$$b = e_1 - e_2 - e_3$$

$$c = 2e_1 + 2e_2 - e_3$$

- a) Jika  $B$  adalah multivektor,  $B = ab$ , perlihatkan bahwa  $a = Bb^{-1}$
- b) Tentukan perpotongan bidang yang dibentuk oleh vektor  $b$  dan  $c$  dengan bidang  $(e_2 \wedge e_3)$

Jawaban:

$$(a) B = ab = (2e_1 + e_2 - e_3)(e_1 - e_2 - e_3) = 2 - 3e_{12} - 2e_{23} + e_{31}$$

$$b^{-1} = \frac{b}{\|b\|^2} = \frac{e_1 - e_2 - e_3}{(\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2})^2} = \frac{e_1 - e_2 - e_3}{3} = \frac{1}{3}(e_1 - e_2 - e_3)$$

sehingga

$$\begin{aligned} Bb^{-1} &= (2 - 3e_{12} - 2e_{23} + e_{31}) \frac{1}{3}(e_1 - e_2 - e_3) \\ &= \frac{1}{3} ((2e_1 - 2e_2 - 2e_3) + (3e_2 + 3e_1 + 3e_{123}) + \\ &\quad (-2e_{123} - 2e_3 + 2e_2) + (e_3 - 2e_{123} + e_1)) \\ &= \frac{1}{3} (6e_1 + 3e_2 - 3e_3) = 2e_1 + e_2 - e_3 = a \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

(b) Bidang yang dibentuk oleh  $b$  dan  $c$  misalkan adalah  $A$

$$\begin{aligned} A &= b \wedge c = (e_1 - e_2 - e_3) \wedge (2e_1 + 2e_2 - e_3) \\ &= 4e_{12} + 3e_{23} - e_{31} \end{aligned}$$

Maka, perpotongan  $A$  dengan  $e_2 \wedge e_3$  dihitung dengan operasi *meet*:

$$\begin{aligned} A \vee (e_2 \wedge e_3) &= A^* \cdot (e_2 \wedge e_3) \\ &= e_{123}(4e_{12} + 3e_{23} - e_{31}) \cdot e_{23} \quad (\text{Ket: } A^* = I A = e_{123} A) \\ &= 4e_{12312} + 3e_{12323} - e_{12331}) \cdot e_{23} \\ &= (-4e_3 - 3e_1 + e_2) \cdot e_{23} \quad \text{Gunakan } a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba) \\ &= \frac{1}{2}((-4e_3 - 3e_1 + e_2)e_{23} - e_{23}(-4e_3 - 3e_1 + e_2)) \\ &= \frac{1}{2}(-4e_{323} - 3e_{123} + e_{223} + 4e_{233} + 3e_{231} - e_{232}) \\ &= \frac{1}{2}(8e_2 + 2e_3) \\ &= 4e_2 + e_3 \end{aligned}$$

# Hubungan antara aljabar vektor dengan aljabar geometri

TABLE 8.9

Vector Algebra		Geometric Algebra	
vector	$v = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$	vector	$v = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$
map	$a = a_1 \quad b = a_2$	map	$Z = \mathbf{e}_1 v$
complex number	$z = a + bi$	multivector	$Z = a_1 + a_2 I$
rotor	$z' = ze^{i\phi}$	rotor	$Z' = Ze^{I\phi}$ $v' = ve^{I\phi}$
90° rotor	$v' = -a_2\mathbf{i} + a_1\mathbf{j}$	90° rotor	$v' = vI$

# Hubungan antara aljabar geometri dengan aljabar quaternion

Perkalian  $i, j$ , dan  $k$  di dalam aljabar quaternion:

TABLE 8.10

	$i$	$j$	$k$
$i$	$-1$	$k$	$-j$
$j$	$-k$	$-1$	$i$
$k$	$j$	$-i$	$-1$

$$ijk = -1$$

Pada kedua tabel, hasil perkalian merupakan pencerminan terhadap diagonal utama namun dengan tanda berbeda

Misalkan didefinisikan tiga buah *bivector*:

$$B_1 = e_2 \wedge e_3$$

$$B_2 = e_3 \wedge e_1$$

$$B_3 = e_1 \wedge e_2$$

Perkalian ketiga buah *bivector* hasilnya:

TABLE 8.11

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$B_1$	$-1$	$-B_3$	$B_2$
$B_2$	$B_3$	$-1$	$-B_1$
$B_3$	$-B_2$	$B_1$	$-1$

$$B_1 B_2 B_3 = +1$$

# Hubungan antara *outer product* dan *cross product*

- Diberikan dua buah vektor di  $\mathbb{R}^3$ :  $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  dan  $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_{31} + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12}.$$

- Kalikan  $e_{123}$  dengan  $a \wedge b$  :

$$e_{123}(a \wedge b) = (a_2b_3 - a_3b_2)e_{123}e_{23} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_{123}e_{31} + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{123}e_{12}$$

$$e_{123}(a \wedge b) = -(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 - (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 - (a_1b_2 - a_2b_1)e_3.$$

- Kalikan kedua ruas dengan  $-1$ :

$$-e_{123}(a \wedge b) = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

- Maka dapat dinyatakan bahwa:

$$a \times b = -e_{123}(a \wedge b) = -I(a \wedge b)$$

- Dengan mengingat bahwa  $a \times b$  menghasilkan vektor  $v$  yang ortogonal dengan  $a$  dan  $b$ , maka

$$v = -IB \quad (v = a \times b \text{ dan } B = a \wedge b)$$

**Contoh 6:** Diberikan dua buah vektor di  $\mathbb{R}^3$  sebagai berikut:

$$a = -e_2 + e_3$$

$$b = e_1 - e_2.$$

Maka perkalian silang  $a$  dan  $b$  adalah

$$\begin{aligned} a \times b = c &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Vektor  $c$  dapat dihitung pula sebagai berikut

$$B = a \wedge b$$

$$= (-e_2 + e_3) \wedge (e_1 - e_2)$$

$$= -e_2 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_1 - e_3 \wedge e_2$$

$$B = e_{12} + e_{31} + e_{23}.$$



$$c = -IB$$

$$= -e_{123}(e_{12} + e_{31} + e_{23})$$

$$= e_3 + e_2 + e_1$$

$$c = e_1 + e_2 + e_3 \text{ (hasilnya sama)}$$



# Latihan (UAS 2022)

(Kerjakan soal ini) Diberikan tiga buah vektor sebagai berikut:

$$a = 2e_1 + e_2 - e_3$$

$$b = e_1 - e_2 - e_3$$

$$c = 2e_1 + 2e_2 - e_3$$

Tentukan perpotongan bidang yang dibentuk oleh vektor  $a$  dan  $c$  dengan bidang  $(e_2 \wedge e_3)$

TAMAT