Pembahasan Kuis 1 2017

Tim Pengajar Probabilitas dan Statistik
Prodi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Soal 1

- Suatu prodi memiliki 3 laboratorium yang mengampu matakuliah pilihan untuk diambil oleh mahasiswa. Lab A menawarkan 2 matakuliah pilihan, Lab B menawarkan 3 matakuliah pilihan, dan Lab C menawarkan 3 matakuliah pilihan. Seorang mahasiswa akan memilih secara acak 2 matakuliah pilihan yang akan diambil. Misalkan X merupakan jumlah matakuliah dari lab B dan Y merupakan jumlah matakuliah dari lab A, maka:
  a. Tentukan fungsi peluang gabungan f(x,y), dan tabel lengkap distribusi peluang gabungan.
  b. Tentukanlah peluang minimal satu matakuliah lab A atau lab B dipilih.
  c. Tentukan apakah kedua variabel acak X dan Y dependent atau independent.
  d. Tentukan kovariansi dan koefisien korelasi X dan Y.

Solusi Soal 1a

- X: jumlah matakuliah dari lab B
- Y: jumlah matakuliah dari lab A

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$$

	$f(x,y)$	x = 0	1	2	Row Totals
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
Column Totals		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Solusi Soal 1bc

b. Peluang minimal satu matakuliah lab A atau lab B dipilih (daerah C: $\{(x,y) | x+y \geq 1\}$):

$P[(X,Y) \in C]=1-P(X+Y<1)=1-f(0,0)=1-3/28=25/28$

c. Kedua variabel acak dependent jika terdapat $f(x,y) \neq g(x)h(y)$. Untuk $f(0,0)=3/28$; $g(0)=5/14$;$h(0)=15/28$. Karena $f(0,0) \neq g(0)^{*} h(0)$, maka kedua variabel acak tersebut dependent.

Solusi Soal 1d

$\sigma_{XY}=E((X- \mu_X)(Y- \mu_Y))=E(XY)- \mu_X\mu_Y$

$\mu_X=0(5/14)+1(15/28)+2(3/28)=21/28=3/4$

$\mu_y=0(15/28)+1(3/7)+2(1/28)=14/28=1/2$

$E(XY)=3/14$

$\sigma_{XY}=3/14-(3/4)(1/2)=12/56-21/56=-9/56$

$\rho_{XY}=\sigma_{XY}/\sigma_X\sigma_y$

$E(X^2)= 0^2 (5/14)+1^2 (15/28)+2^2 (3/28)=27/28$

$E(Y^2)= 0^2 (15/28)+1^2 (3/7)+2^2 (1/28)=16/28$

$\sigma_X{}^2= E(X^2)- \mu_X{}^2=27/28 – (3/4)^2=45/112$

$\sigma_Y{}^2= E(Y^2)- \mu_Y{}^2=16/28 – (1/2)^2=9/28=36/112$

$\rho_{XY}= -9/56 / (\sqrt{}(45/112) . \sqrt{}(36/112))= -9/56 / \sqrt{}5/112= -1/\sqrt{}5= -\sqrt{}5/5$

Soal 2

- Jika keuntungan per minggu dari suatu market place, dalam juta rupiah, adalah variabel acak kontinu g(X) = 9X+2 dimana X mempunyai fungsi densitas peluangnya sbb:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

  a. Tentukan ekspektasi dan varians keuntungan per minggu.
  b. Dengan menggunakan Chebyshev, tentukan peluang rata2 keuntungan per minggu diantara tambah 2 simpangan baku dan kurang 2 simpangan baku.
  c. Dengan menggunakan Chebyshev, tentukan peluang rata2 keuntungan per minggu lebih kecil dari 1 juta (catatan gunakan √4.5=2)

Solusi Soal 2a

Ekspektasi dari f(x) = E{X]

$$E[X]=\int_{\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{1} 2x(1-x)dx=\frac{2}{2}x^{2}\,|_{0}^{1}-\frac{2}{3}x^{3}\,|_{0}^{1}=1(1^{2}-0)-\frac{2}{3}(1^{3}-0)=\frac{1}{3}$$

Variansi (X) = $E[X^2]$ - $(E[X])^2$

$$E[X^{2}]=\int_{\infty}^{\infty} x^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1} 2x^{2}(1-x)dx=\frac{2}{3}x^{3}-\frac{2}{4}x^{4}\,|_{0}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$$

Var (X) = (1/6) – $(1/3)^2$ = 1/18

Ekspektasi keuntungan per minggu = g(X) = 9X+2 dalam juta rupiah.

$$E[g(X)]=E[9X+2]=9E[X]+2=9\left(\frac{1}{3}\right)+2=3+2=5$$

$$Var[g(X)]=Var(9X+2)=9^{2}Var(X)=81\left(\frac{1}{18}\right)=\frac{9}{2}$$

Simpangan baku = √(9/2) = 2

Solusi Soal 2b

b) Chebyshev : $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$

$$P(5 - 2(2) < g(X) < 5 + 2(2)) \geq 1 - \frac{1}{2^2} \geq \frac{3}{4}$$

$$P(1 < g(X) < 9) \geq \frac{3}{4}$$

c) $P(g(X) < 1) + P(g(X) > 9) = 1 - \dfrac{3}{4}$

$$P(g(X) < 1) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Soal 3

- Sebuah toko handphone menjual tiga macam merk, SAMSUNG, LENOVO dan NOKIA dengan jumlah masing-masing adalah 30%, 20%, dan 50%. Dari merk handphone tersebut, kadang-kadang ada kerusakan dengan peluang masing-masing 1%, 3%, dan 2%. Jika pembeli menemukan kerusakan, hitunglah peluang kerusakan terjadi pada merk SAMSUNG, LENOVO, dan NOKIA. (dihitung ketiganya)

Solusi Soal 3

$$P(S) = 30\% = 0.3 \qquad P(R|S) = 1\% = 0.01$$

$$P(L) = 20\% = 0.2 \qquad P(R|L) = 3\% = 0.03$$

$$P(N) = 50\% = 0.5 \qquad P(R|N) = 2\% = 0.02$$

$$\begin{aligned} P(S|R) &= \frac{P(S)P(R|S)}{P(S)P(R|S) + P(L)P(R|L) + P(N)P(R|N)} \\ &= \frac{0.3 * 0.01}{0.3 * 0.01 + 0.2 * 0.03 + 0.5 * 0.02} \\ &= \frac{3}{19} \end{aligned}$$

Solusi Soal 3

$$
\begin{aligned}
P(L|R) &= \frac{P(L)P(R|L)}{P(S)P(R|S) + P(L)P(R|L) + P(N)P(R|N)} \\
&= \frac{0.2 * 0.03}{0.3 * 0.01 + 0.2 * 0.03 + 0.5 * 0.02} \\
&= \frac{6}{19}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(N|R) &= \frac{P(N)P(R|N)}{P(S)P(R|S) + P(L)P(R|L) + P(N)P(R|N)} \\
&= \frac{0.5 * 0.02}{0.3 * 0.01 + 0.2 * 0.03 + 0.5 * 0.02} \\
&= \frac{10}{19}
\end{aligned}
$$