Probabilitas

Materi yang Dibahas:

1. Ruang Sampel
2. Kejadian
3. Peluang dari Suatu Kejadian
4. Aturan Penjumlahan Peluang
5. Peluang Bersyarat
6. Aturan Bayes

Institut Teknologi Bandung

Ruang Sampel (1)

Definisi Ruang Sampel:

Kumpulan dari semua kejadian dari eksperimen statistik,

dinotasikan dengan *S*

Ruang Sampel (2)

Contoh 1 (Identifikasi Ruang Sampel):

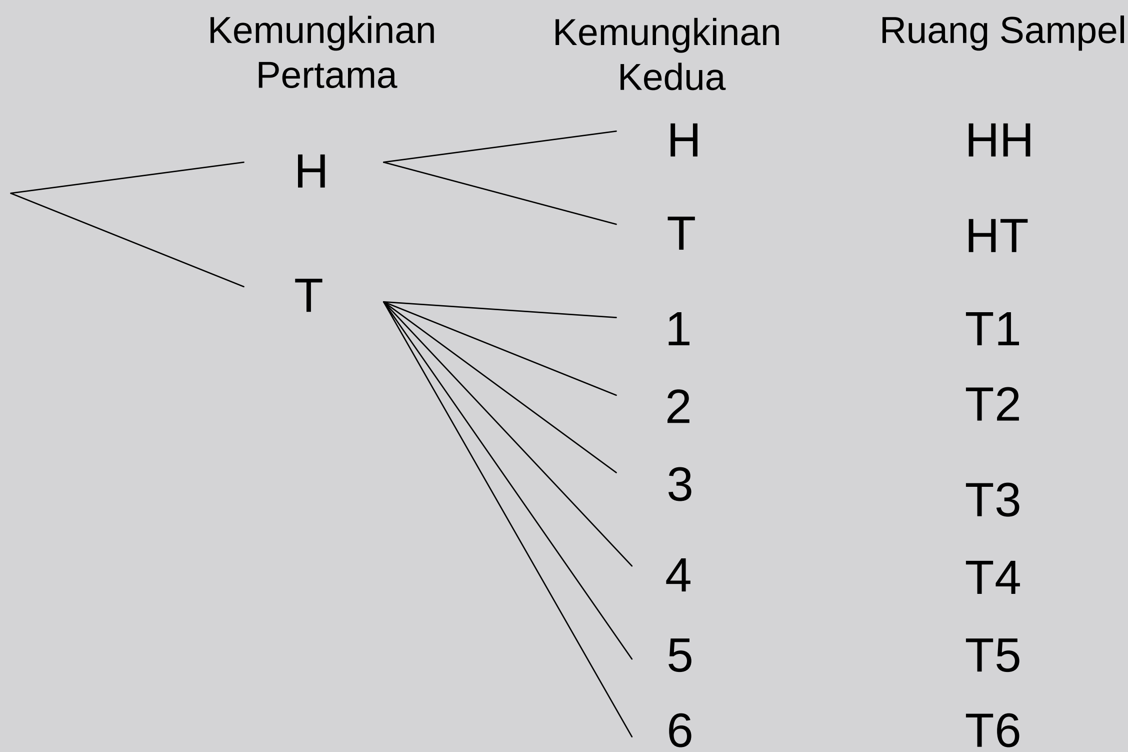
Suatu eksperimen melempar koin kemudian melempar sekali lagi bila yang muncul pertama adalah muka, jika yang muncul belakang diteruskan dengan melempar dadu.

Maka ruang sampelnya adalah

$$S = \{ HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6 \}$$

Ruang Sampel (3)

- Diagram Pohon untuk Mengidentifikasi Ruang Sampel



Kejadian (1)

- Definisi:

  Kejadian adalah *subset* dari ruang sampel, yaitu suatu kejadian dengan kondisi tertentu

Kejadian (2)

- Contoh Identifikasi Suatu Kejadian:
  Diberikan suatu ruang sampel $S = \{t | t \geq 0\}$, di mana t adalah umur dalam satuan tahun suatu komponen elektronik. Suatu kejadian A adalah umur komponen yang kurang dari lima tahun, atau dituliskan $A = \{t | 0 \leq t \leq 5\}$.

Peluang dari Kejadian (1)

- Definisi:
  Peluang dari suatu kejadian A adalah jumlah dari bobot semua titik sampel dalam A, sehingga:

$$0 \leq P(A) \leq 1, \; P(\varnothing) = 0 \text{ dan } P(S) = 1$$

Peluang dari Kejadian (2)

- Contoh:
  Suatu mata uang dilempar dua kali.
  Tentukan peluang sekurang-kurangnya satu *head* muncul.

  Jawab:
  Ruang sampel dari eksperimen ini adalah:
  $$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$$
  Jika mata uang ini rata / seimbang maka peluangnya sama, masing-masing $\frac{1}{4}$.

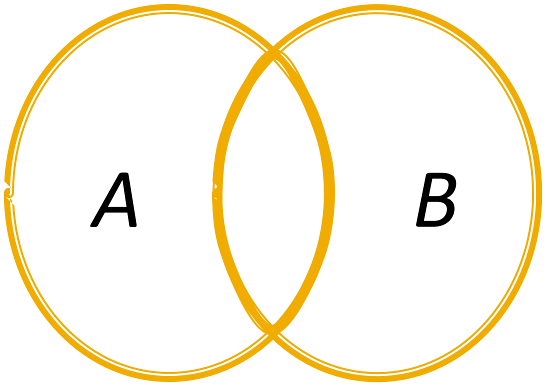
  Jika A adalah kejadian tersebut maka:
  $$A = \{ HH, HT, TH \} \text{ dan } P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

Aturan Penjumlahan (1)

Teorema:

Jika *A* dan *B* adalah dua buah kejadian sembarang,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



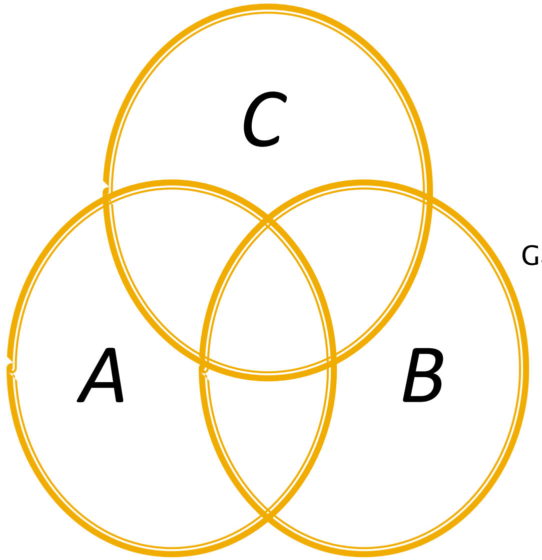
Gambar 1.2.1 Ilustrasi Aturan Penjumlahan pada Dua Kejadian Sembarang

Aturan Penjumlahan (2)

Teorema:

Untuk tiga kejadian sembarang *A*, *B*, dan *C*, maka:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



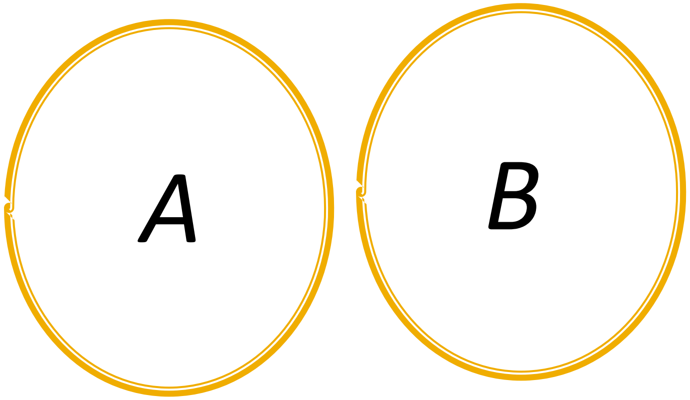
Gambar 1.2.2 Ilustrasi Aturan Penjumlahan pada Tiga Kejadian Sembarang

Aturan Penjumlahan (3)

Akibat:

Jika *A* dan *B* saling lepas (*mutually exclusive*), maka:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

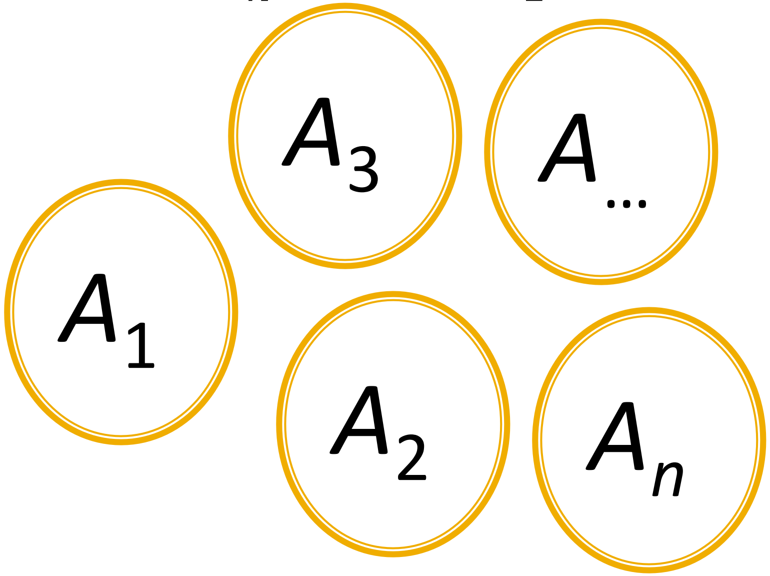


Gambar 1.2.3 Ilustrasi Aturan Penjumlahan pada Dua Kejadian Saling Lepas

Aturan Penjumlahan (4)

Jika $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *mutually exclusive*, maka:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$



Gambar 1.2.4 Ilustrasi Aturan Penjumlahan pada *n* Kejadian Sembarang

Aturan Penjumlahan (5)

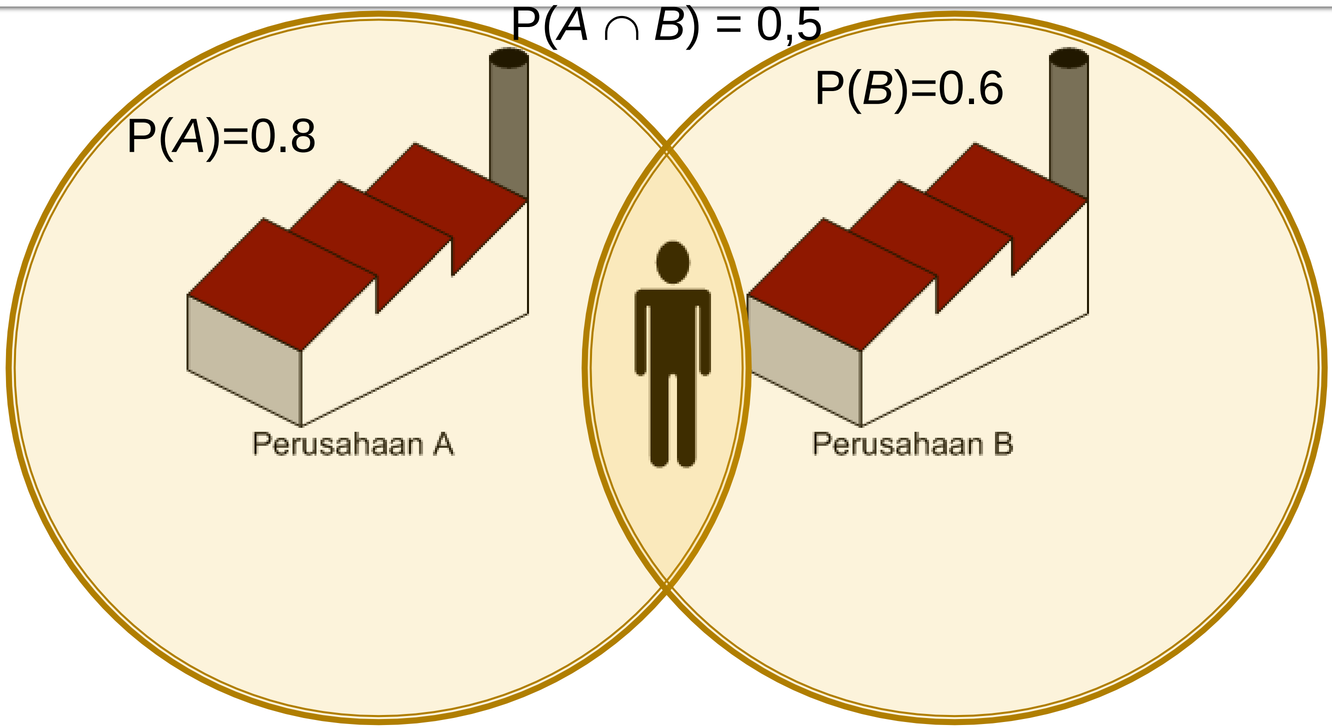
Contoh 1: Example 2.29

Djoni lulus dari suatu universitas. Setelah ia mengikuti wawancara penerimaan karyawan pada 2 perusahaan, ia melakukan penilaian sendiri.

- Peluang diterima perusahaan A, $P(A) = 0{,}8$
- Peluang diterima perusahaan B, $P(B) = 0{,}6$
- Peluang diterima keduanya, $P(A \cap B) = 0{,}5$

Berapa peluang diterima sekurang-kurangnya satu perusahaan?

Aturan Penjumlahan (6)



$$P(A \cup B) = ?$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}9$$

Gambar 1.2.5 Ilustrasi Aturan Penjumlahan pada Contoh Soal Penerimaan Karyawan

Aturan Penjumlahan (7)

Contoh 2 (Example2.30):

Berapa peluang memperoleh jumlah 7 atau 11 jika sepasang dadu dilempar?

Jawab:

Pelemparan sepasang dadu mempunyai 36 titik sampel yaitu (1,1) … (6,6).

A: Kejadian muncul jumlah 7, ada 6 titik sampel yaitu (1,6) … (6,1).

B: Kejadian muncul jumlah 11, ada 2 titik sampel yaitu (5,6) dan (6,5).

Kejadian *A* dan *B* saling lepas karena dalam satu lemparan tidak ada yang muncul jumlah 7 dan 11 bersamaan.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$$

Aturan Penjumlahan (8)

Teorema:

Jika *A* dan *A′* dua kejadian saling komplemen maka:

$$P(A) + P(A') = 1$$

Peluang Bersyarat (1)

- Peluang kejadian *B* terjadi jika diketahui bahwa kejadian *A* telah terjadi disebut peluang bersyarat, notasi P(*B*|*A*), dibaca " peluang *B* terjadi diberikan *A* telah terjadi ".
- Artinya menghitung peluang *B* terjadi relatif terhadap kejadian *A* yang semula, peluang *A* dan *B* terjadi relatif terhadap ruang sampel *S*.
- Hitung dahulu peluang baru *A* proposional dengan peluang semula *A* sehingga jumlahnya sama dengan 1.

Peluang Bersyarat (2)

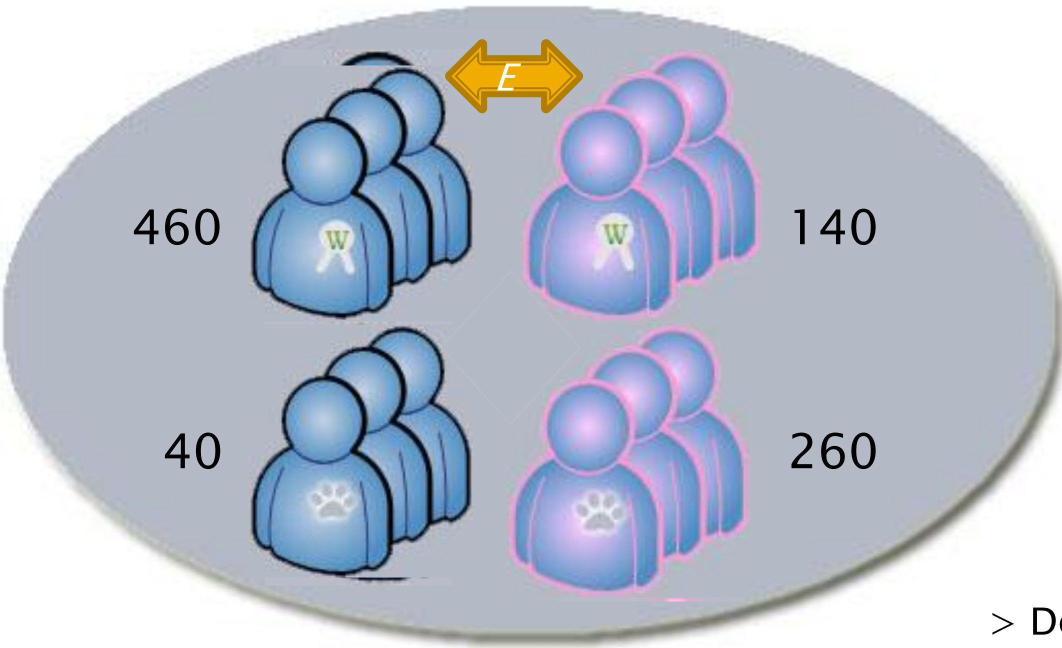
- **Definisi**:
  Peluang bersyarat *B* diberikan *A*,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

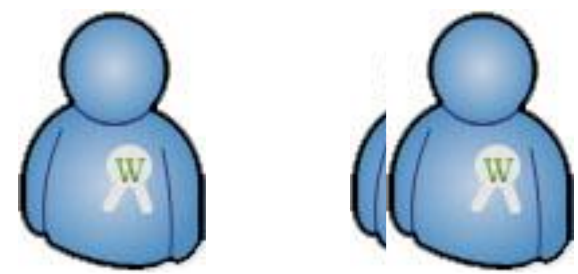
Table 2.1: Categorization of the Adults in a Small Town

	Employed	Unemployed	Total
Male	460	40	500
Female	140	260	400
Total	600	300	900

Peluang Bersyarat (3), Tabel 2.1



Gambar 1.2.6 Ilustrasi Peluang Bersyarat dari Suatu Ruang Sampel Populasi Orang Dewasa



> Dengan menggunakan ruang sampel *E*

$$P(M \mid E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

> Dengan menggunakan ruang sampel semula *S*

$$P(M \mid E) = \frac{n(E \cap M)}{n(E)} = \frac{n(E \cap M)/n(S)}{n(E)/n(S)} = \frac{P(E \cap M)}{P(E)}$$

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}, P(E \cap M) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}$$

$$P(M \mid E) = \frac{23/45}{2/3} = \frac{23}{30}$$

<u>Notasi</u>

M : kejadian seorang laki-laki dipilih

E : kejadian seorang terpilih bekerja

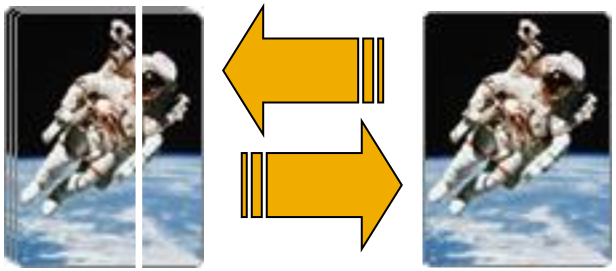
Kejadian Saling Bebas (1)

- **Definisi**:
  Dua kejadian *A* dan *B* saling bebas (*independent*) jika dan hanya jika

$$P(B \mid A) = P(B)$$
$$P(A \mid B) = P(A)$$

- Jika tidak berlaku demikian, *A* dan *B* disebut saling bergantung (*dependent*).

Kejadian Saling Bebas (2)



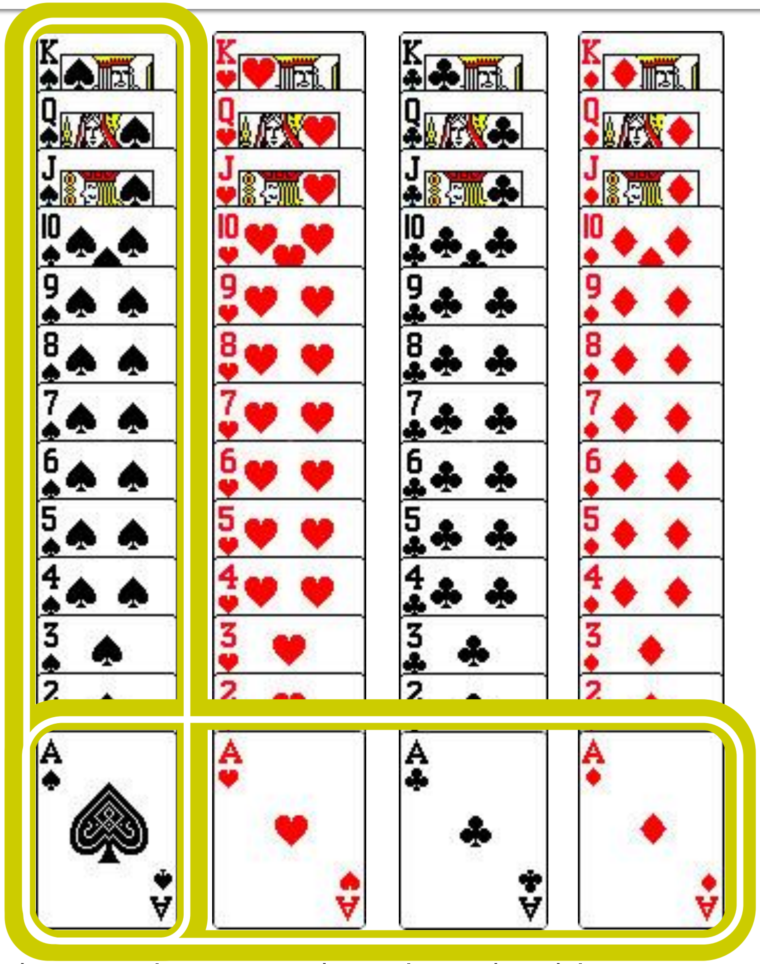
A : kejadian kartu pertama *ace*, kemudian dikembalikan

B : kejadian kartu kedua *spade*

Apakah kejadian *A* dan *B* saling bebas?

Gambar 1.2.7 Ilustrasi Kejadian Saling Bebas dalam Permainan Kartu Bridge

Kejadian Saling Bebas (2)



Gambar 1.2.7 Ilustrasi Kejadian Saling Bebas dalam Permainan Kartu Bridge

A : kejadian kartu pertama *ace*, kemudian dikembalikan

B : kejadian kartu kedua *spade*

Apakah kejadian *A* dan *B* saling bebas?

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{(4/52)*(13/52)}{4/52} = \frac{1/52}{4/52} = \frac{1}{4}$$

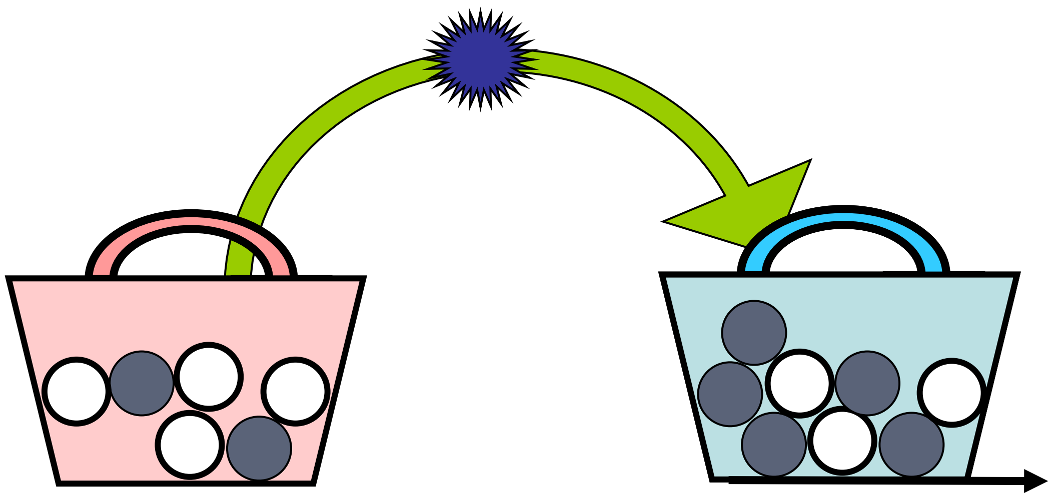
$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Aturan Perkalian (1)

- **Teorema**:
  Jika dalam suatu eksperimen dua kejadian *A* dan *B* dapat terjadi maka

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

Aturan Perkalian (2)

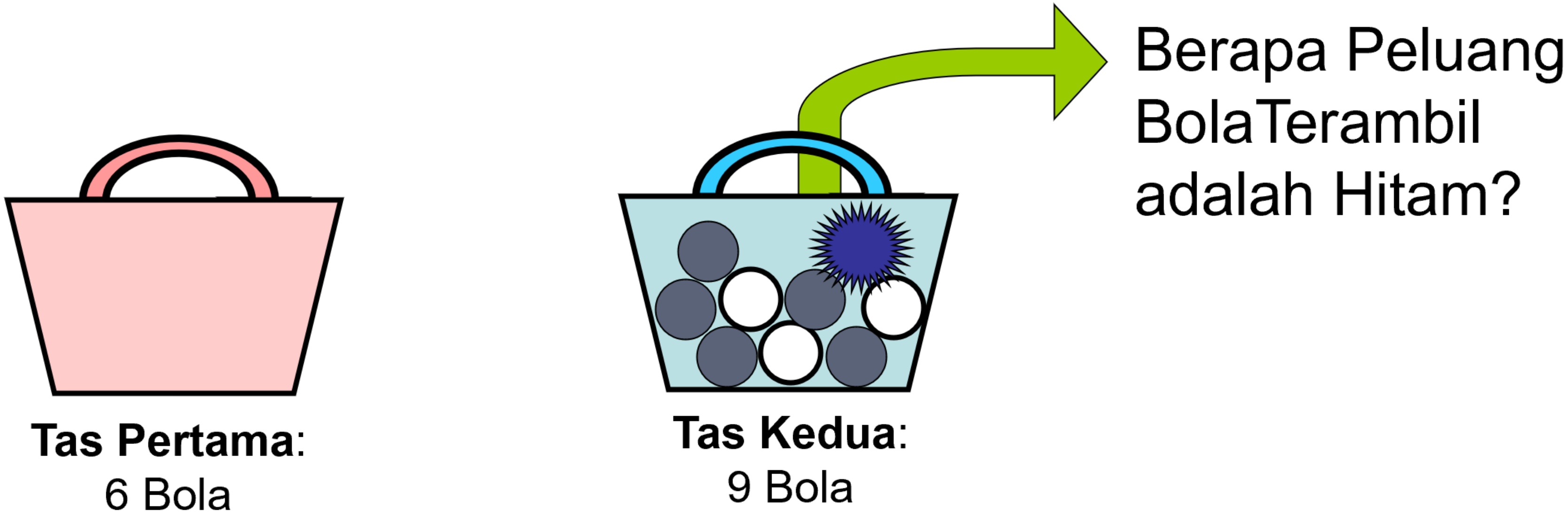


Tas Pertama:
4 Bola Putih
3 Bola Hitam

Tas Kedua:
3 Bola Putih
5 Bola Hitam

Gambar 1.2.8 Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

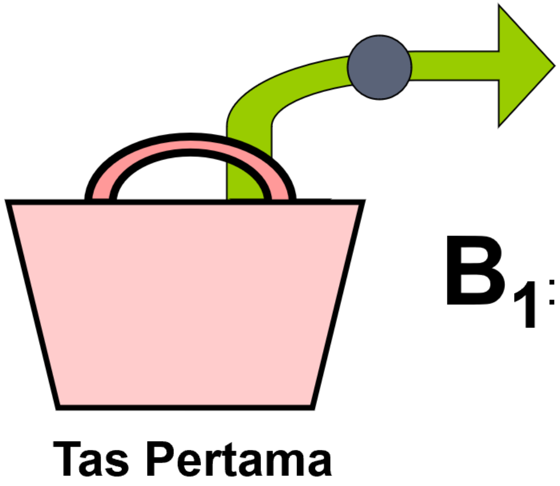
Aturan Perkalian (2)



Gambar 1.2.8 Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

Aturan Perkalian (2)

Definisi Istilah



B_1: Pengambilan Bola **Hitam** dari Tas Pertama

Gambar 1.2.8 Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

Aturan Perkalian (2)

Definisi Istilah

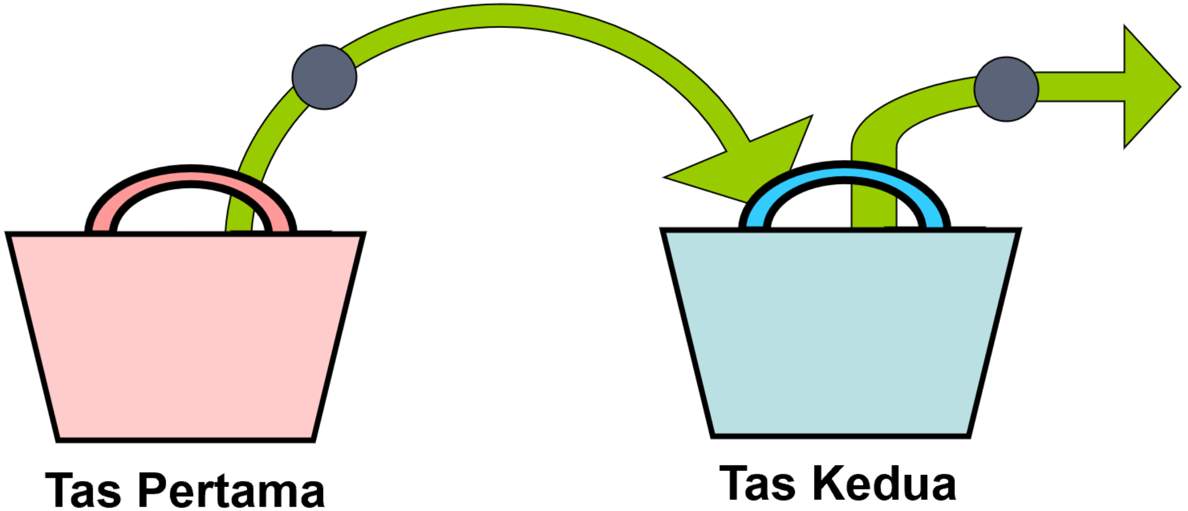
Tas Pertama

$\mathbf{W_1}$: Pengambilan Bola **Putih** dari Tas Pertama

Gambar 1.2.8 Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

Aturan Perkalian (2)

Kejadian yang Dimaksud

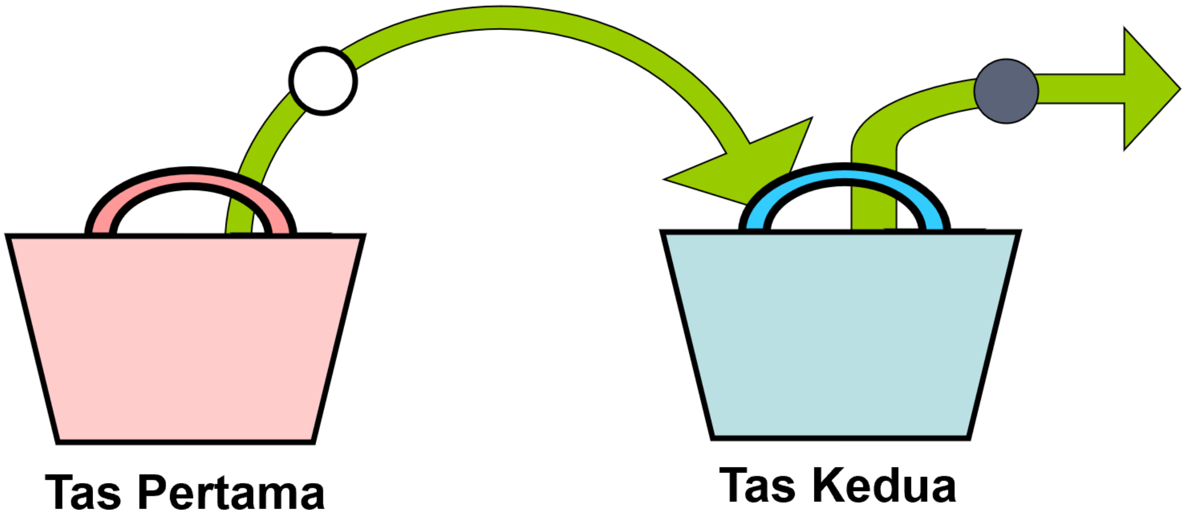


$$B_1 \cap B_2$$

Gambar 1.2.8 Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

Aturan Perkalian (2)

Kejadian yang Dimaksud



$$W_1 \cap B_2$$

Gambar 1.2.8 Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

Aturan Perkalian (2)

Kejadian yang Dimaksud

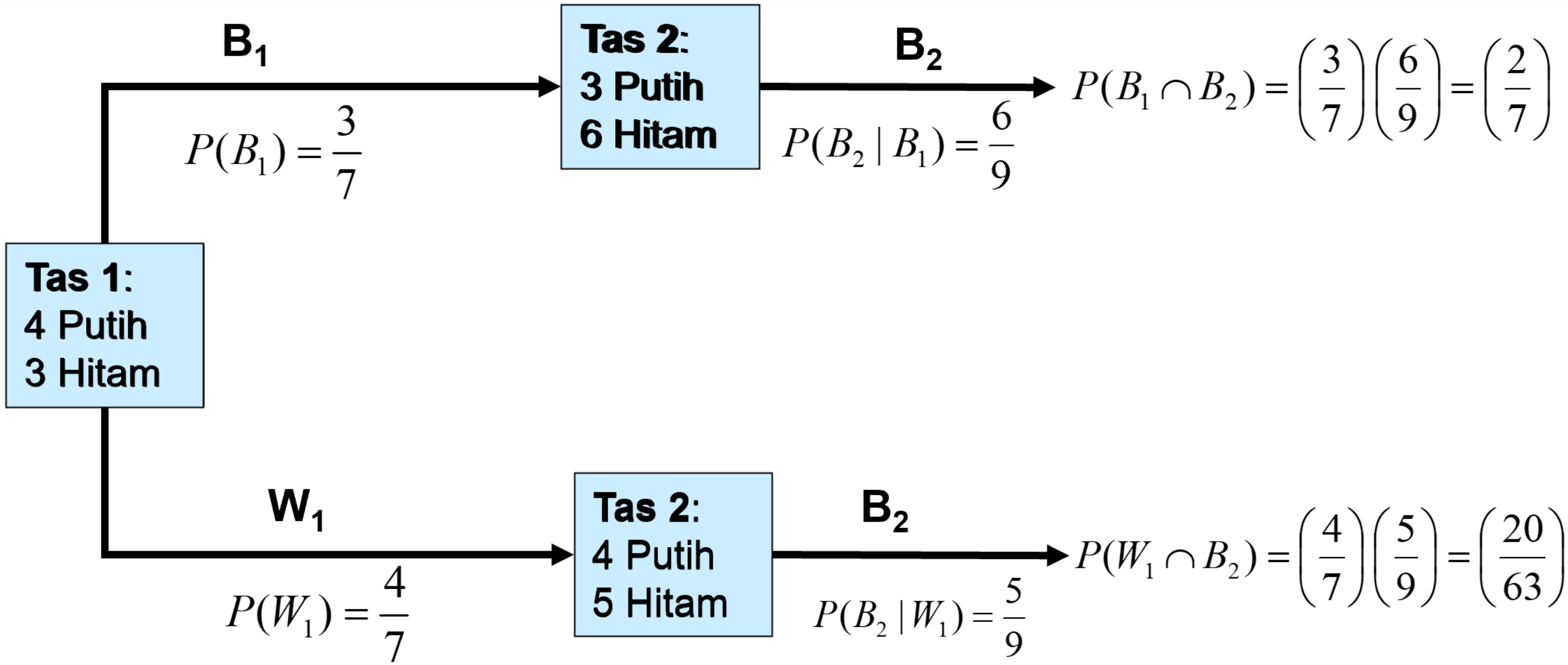
$$P((B_1 \cap B_2)\ atau\ (W_1 \cap B_2))$$

$$= P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap B_2)$$

$$P(B_1)P(B_2 \mid B_1)$$

$$P(W_1)P(B_2 \mid W_1)$$

Aturan Perkalian (2)



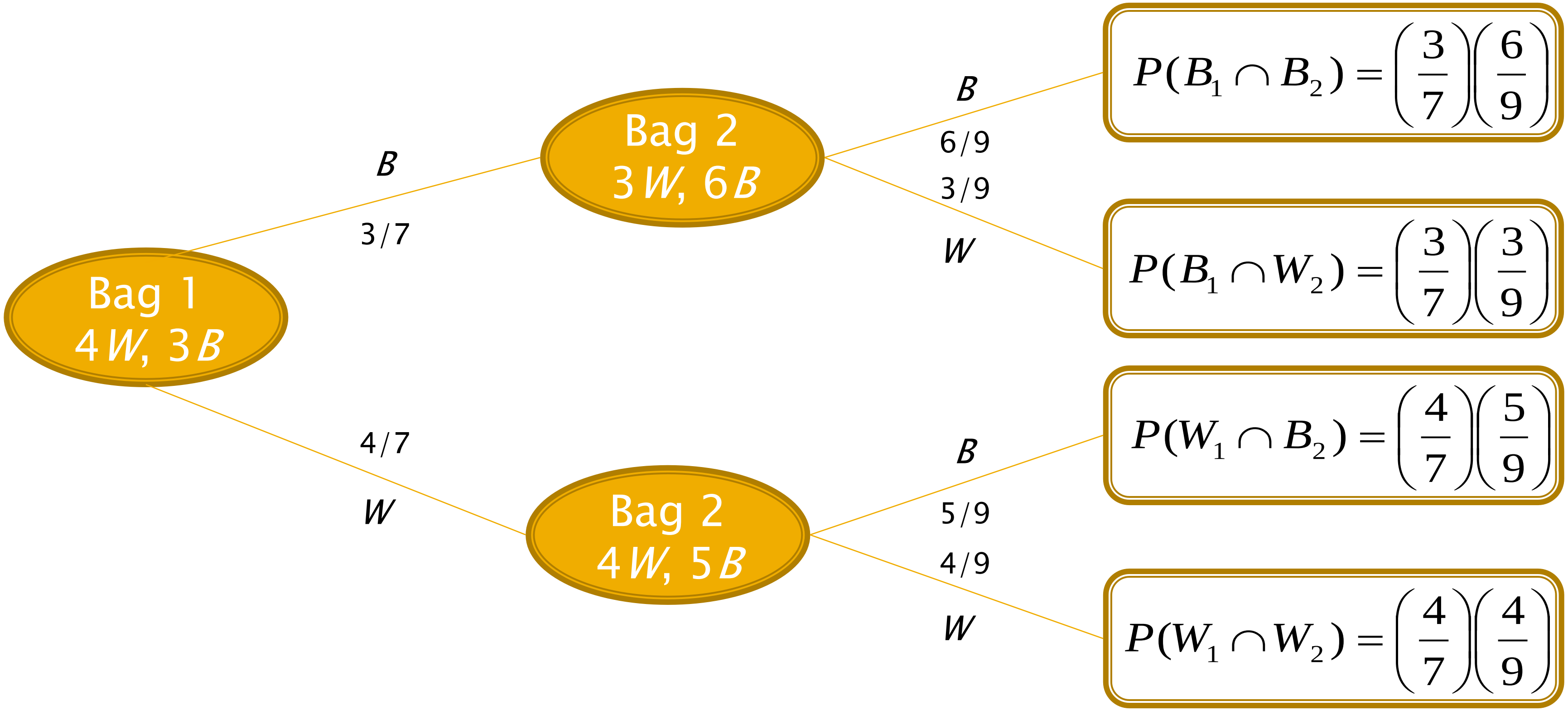
Gambar 1.2.9 Diagram Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

Peluang Kejadian yang dimaksud = $\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{20}{63}\right) = \left(\frac{38}{63}\right)$

Aturan Perkalian (3)

Notasi

Bag 1 :	pengambilan bola dari tas pertama	*B*1 :	pengambilan bola hitam dari tas pertama
Bag 2 :	pengambilan bola dari tas kedua	*W*1 :	pengambilan bola putih dari tas pertama
W :	bola putih	*B*2 :	pengambilan bola hitam dari tas kedua
B :	bola hitam	*W*2 :	pengambilan bola putih dari tas kedua



Gambar 1.2.10 Diagram Pohon Ilustrasi Penggunaan Teorema Aturan Perkalian Peluang

Aturan Perkalian (4)

- **Teorema**:
  Dua kejadian saling bebas jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Example 2.41

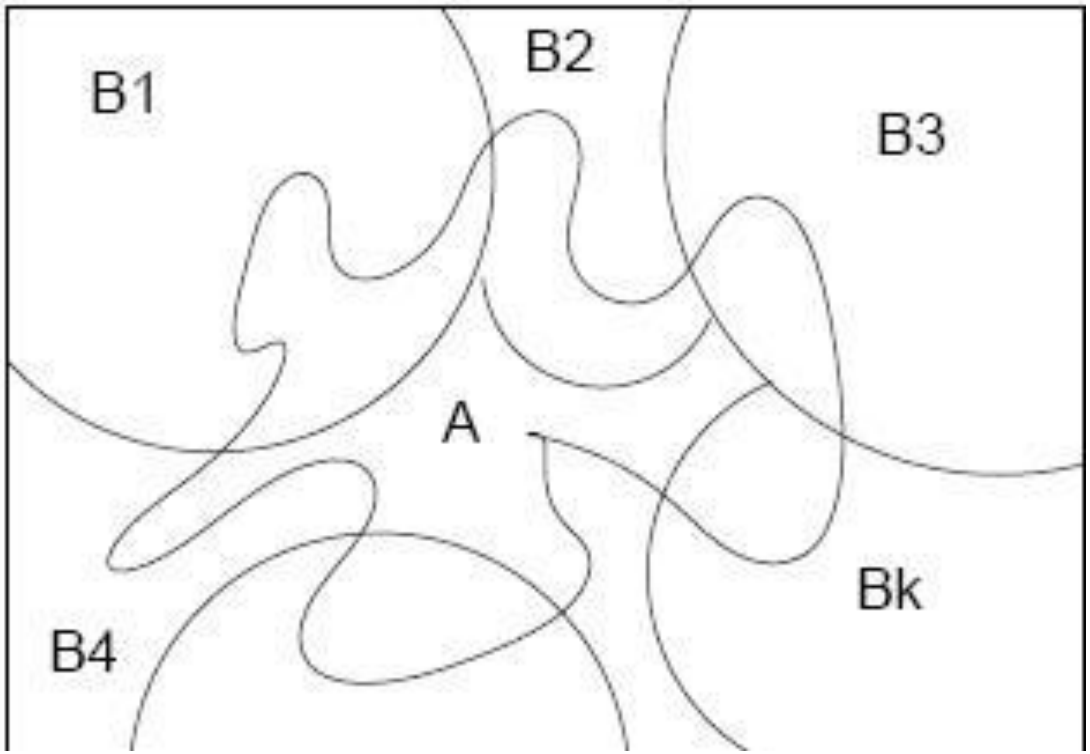
- In a certain assembly plant, three machines, B_1, B_2, and B_3, make 30%, 45%, and 25%, respectively, of the products. It is known from past experience that 2%, 3%, and 2% of the products made by each machine, respectively, are defective. Now, suppose that a finished product is randomly selected. What is the probability that it is defective?

Ilustrasi Kasus Nyata

- *Event-event* yang ada, misalkan:

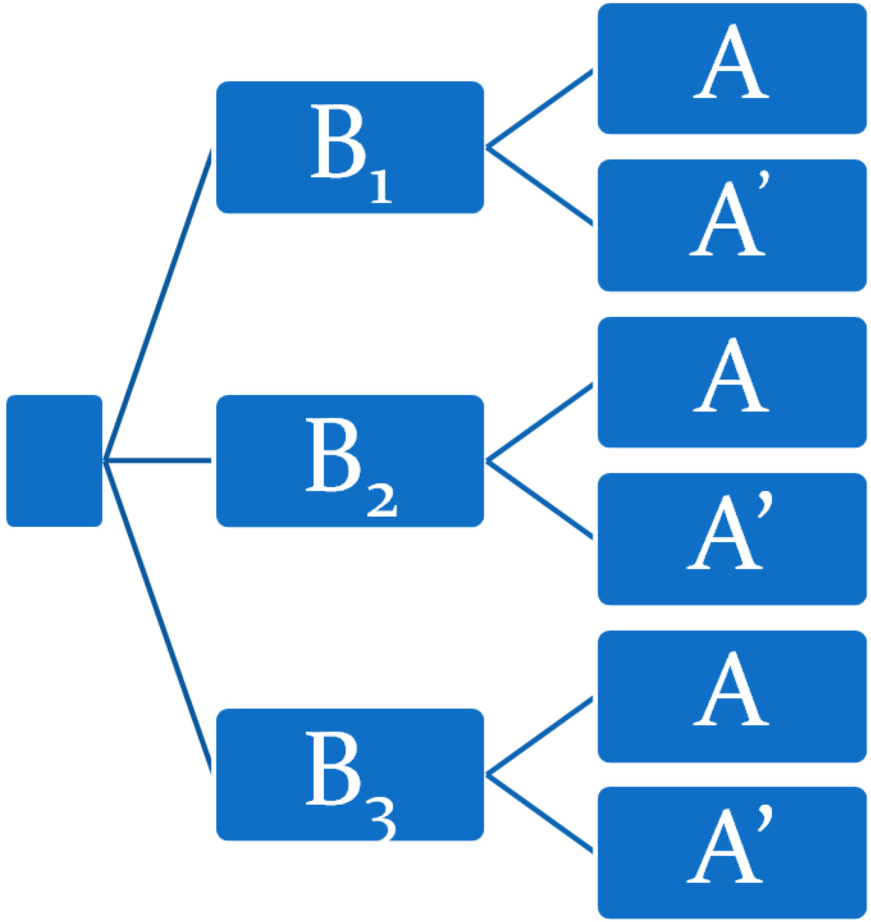
  A : Produk yang defektif
  B_1 : Produk yang dibuat oleh mesin B1
  B_2 : Produk yang dibuat oleh mesin B2
  B_3 : Produk yang dibuat oleh mesin B3

Diagram Venn Aturan Bayes



Gambar 1.3.2 Ilustrasi Aturan Bayes dengan Diagram Venn

Diagram Pohon Aturan Bayes



Gambar 1.3.3 Ilustrasi Aturan Bayes dengan Diagram Pohon

Partisi Ruang Sampel (1)

- Teorema Aturan Eliminasi:
  Jika *event* B_1, B_2, …, B_k membentuk partisi dari ruang sampel S, sedemikian sehingga $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ maka untuk sembarang *event* A dari S berlaku:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(Bi \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(Bi)P(A|Bi)$$

Menghitung Peluang (1)

- Contoh:
  Dalam suatu industri perakitan, tiga mesin B1, B2, dan B3 menghasilkan 30%, 45%, dan 25% produk. Diketahui dari pengalaman sebelumnya 2%, 3%, dan 2% dari produknya mengalami defektif.
  Apabila diambil satu produk jadi secara random, tentukan peluang produk tersebut defektif.

Menghitung Peluang (2)

Dengan menggunakan aturan Eliminasi:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

Dengan memasukkan nilai di atas, diperoleh:

$$P(B_1)P(A|B_1) = (0.3)(0.02) = 0.006$$
$$P(B_2)P(A|B_2) = (0.45)(0.03) = 0.0135$$
$$P(B_3)P(A|B_3) = (0.25)(0.02) = 0.005$$

Sehingga diperoleh:

$$P(A) = 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245$$

Example Tabel 2.1

Suppose that we are now given the additional information that 36 of those employed and 12 of those unemployed are members of the Rotary Club. We wish to find the probability of the event A that the individual selected is a member of the Rotary Club.

	Employed	Unemployed	Total
Male	460	40	500
Female	140	260	400
Total	600	300	900

Jawab

- $P(A)=P[(E\cap A)\cup(E'\cap A)]$
  $= P(E\cap A)+P(E'\cap A)$
  $= P(E)P(A|E)+P(E')P(A|E')$.
- $P(E)= 600/900 = 2/3$
- $P(A|E)=36/600=3/50$
- $P(E')=1/3$
- $P(A|E')= 12/300=1/25$
- $P(A)= (2/3)(3/50)+(1/3)(1/25)= 4/75$

Aturan Bayes (1)

- Teorema Aturan Bayes:

  Jika *event-event* $B_1, B_2, \ldots, B_k$ membangun partisi dari ruang sampel S, di mana $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$ maka untuk sembarang *event* A dalam S dan $P(A) \neq 0$,

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)}$$

$$= \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)} \quad untuk\ r = 1,2,\ldots,k$$

Aturan Bayes (2)

- Contoh:
  Dari soal sebelumnya, pertanyaan dibalik, jika sebuah produk diambil dan ternyata rusak (defektif), tentukan peluang produk tersebut dibuat oleh mesin B3.

Aturan Bayes (3)

Dengan menerapkan aturan Bayes:

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

Dengan memasukkan nilainya diperoleh:

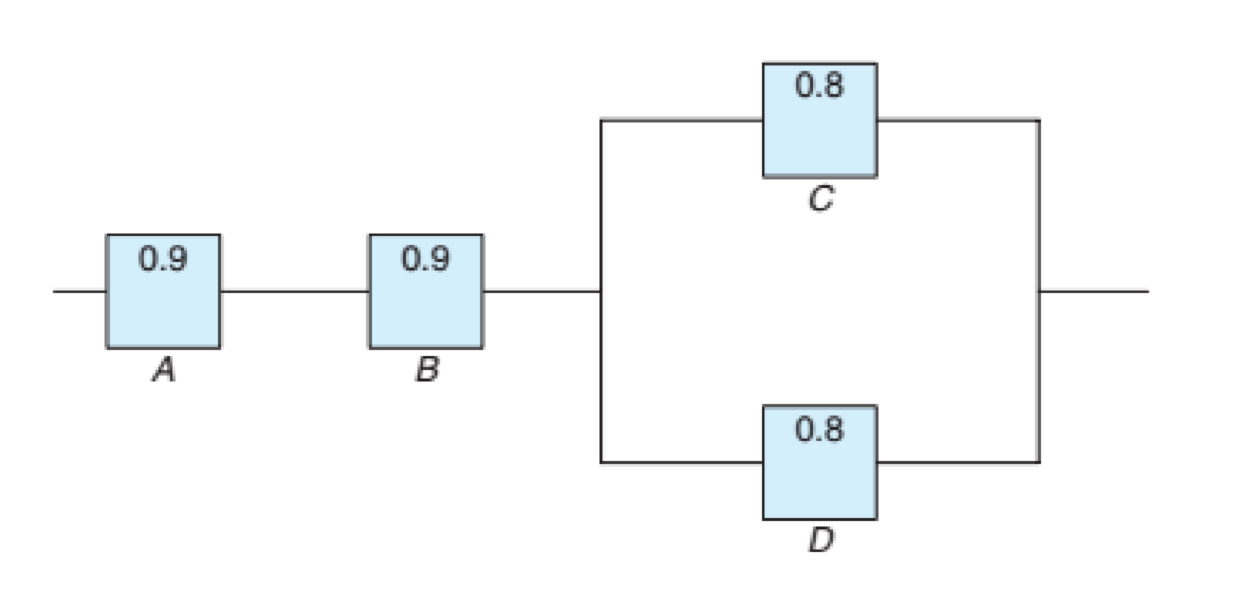
$$P(B_3|A) = \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0145} = \frac{10}{49}$$

Example 2.38

- A small town has one fire engine and one ambulance available for emergencies. The probability that the fire engine is available when needed is 0.98, and the probability that the ambulance is available when called is 0.92. In the event of an injury resulting from a burning building, find the probability that both the ambulance and the fire engine will be available, assuming they operate independently.

Example 2.39

- An electrical system consists of four components as illustrated in Figure 2.9.



Example 2.39

- The system works if components A and B work and either of the components C or D works. The reliability (probability of working) of each component is also shown in Figure 2.9. Find the probability that (a) the entire system works and (b) the component C does not work, given that the entire system works. Assume that the four components work independently

Example 2.40

- Three cards are drawn in succession, without replacement, from an ordinary deck of playing cards. Find the probability that the event $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ occurs, where A_1 is the event that the first card is a red ace, A_2 is the event that the second card is a 10 or a jack, and A_3 is the event that the third card is greater than 3 but less than 7.

Example 2.43

- A manufacturing firm employs three analytical plans for the design and development of a particular product. For cost reasons, all three are used at varying times. In fact, plans 1, 2, and 3 are used for 30%, 20%, and 50% of the products, respectively. The defect rate is different for the three procedures as follows:

Example 2.43 (lanjutan)

- $P(D|P_1)=0.01, P(D|P_2)=0.03, P(D|P_3)=0.02$, where $P(D|P_j)$ is the probability of a defective product, given plan j. If a random product was observed and found to be defective, which plan was most likely used and thus responsible?

PR

- Bab2 : # 55, 69, 85, 95, 99