Pokok Bahasan Bab 3
Konsep Variabel Random dan Distribusi Peluang

Probabilitas & Statistika

Materi yang Dibahas:

1. Konsep Variabel Random
2. Distribusi Peluang Diskrit
3. Distribusi Peluang Kontinu
4. Distribusi Peluang Gabungan

Institut Teknologi Bandung

Global Development Learning Network

Pokok Bahasan 3.1
Konsep Variabel Random dan Distribusi Peluang Diskrit

- Eksperimen:

  Dari eksperimen pengambilan 3 komponen diperoleh ruang sampel $S = \{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DND, DDN, DDD\}$
  Misal kita tertarik pada banyaknya defektif. Dari tiap elemen ruang sampel dapat kita padankan nilai 0, 1, 2, 3 yang menyatakan banyak elemen yang rusak.

Konsep Variabel Random (1)

- Definisi:

Variabel random *X* pada ruang sampel *S* adalah fungsi

$X : S \to \Re$ yang memadankan sebuah bilangan real

$X(s)$ dengan setiap titik sampel $s \epsilon S$

NNN	0
NND, NDN,DNN	1
NDD, DND, DDN	2
DDD	3

Konsep Variabel Random (2)

- Contoh:

  Dua bola diambil secara berurutan tanpa penggantian dari sebuah pot yang berisi 4 bola merah dan 3 bola hitam. Misal *Y* adalah variabel random yang menyatakan warna merah, maka *y*

Ruang Sampel	y
RR	2
RB	1
BR	1
BB	0

Konsep Variabel Random (3)

- Definisi:

  Ruang Sampel Diskrit adalah ruang sampel yang berisi sejumlah hingga kemungkinan hasil atau barisan tak hingga sebanyak elemen-elemen bilangan bulat.

  Contoh: Himpunan bilangan bulat

Konsep Variabel Random (4)

- Definisi:

  Ruang Sampel Kontinu adalah ruang sampel berisi sejumlah tak hingga kemungkinan hasil , sama dengan sejumlah titik pada sebuah segmen garis.

  Contoh: Himpunan bilangan real

Latihan [1]

Classify the following random variables as discrete or continuous:

X: the number of automobile accidents per year in Virginia.

Y : the length of time to play 18 holes of golf.

M: the amount of milk produced yearly by a particular cow.

N: the number of eggs laid each month by a hen.

P: the number of building permits issued each month in a certain city.

Q: the weight of grain produced per acre.

Distribusi Peluang Diskrit

- Definisi:

  Kumpulan pasangan terurut $(x, f(x))$ disebut Fungsi Peluang / Fungsi Massa Peluang dari variabel random diskrit *X*, jika untuk setiap nilai *x* dipenuhi:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

Distribusi Peluang Diskrit (3)

- Contoh 3.8:

  Pengiriman 8 komputer serupa ke penjual berisi 3 defektif. Sekolah akan membeli 2 komputer. Tentukan distribusi peluang komputer defektif.

  Misal X menyatakan variabel random yang bernilai x menyatakan jumlah yang defektif.

Distribusi Peluang Diskrit (4)

- Contoh (3.8):

Maka $f(0) = P(X = 0) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{10}{28}$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

Sehingga distribusi peluang *X* adalah:

x	**0**	**1**	**2**
f(x)	10/28	15/28	3/28

Distribusi Peluang Diskrit (5)

- Definisi:

  Distribusi kumulatif $F(x)$ dari variabel random diskrit *X* dengan distribusi peluang $f(x)$ adalah:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad untuk \quad -\infty < x < \infty$$

Contoh Penjaga Helm

- Ada penjaga helm yang mendapat titipan dari 3 orang untuk menyimpan helmnya.
- Jika M = jumlah helm yang dikembalikan dengan benar ke pemiliknya, maka

$P(M=0) = 1/3$

$P(M=1) = 1/2$

$P(M=3) = 1/6$

Distribusi Peluang Diskrit (7)

- Contoh:

Contoh penjaga helm. Dapat dihitung:

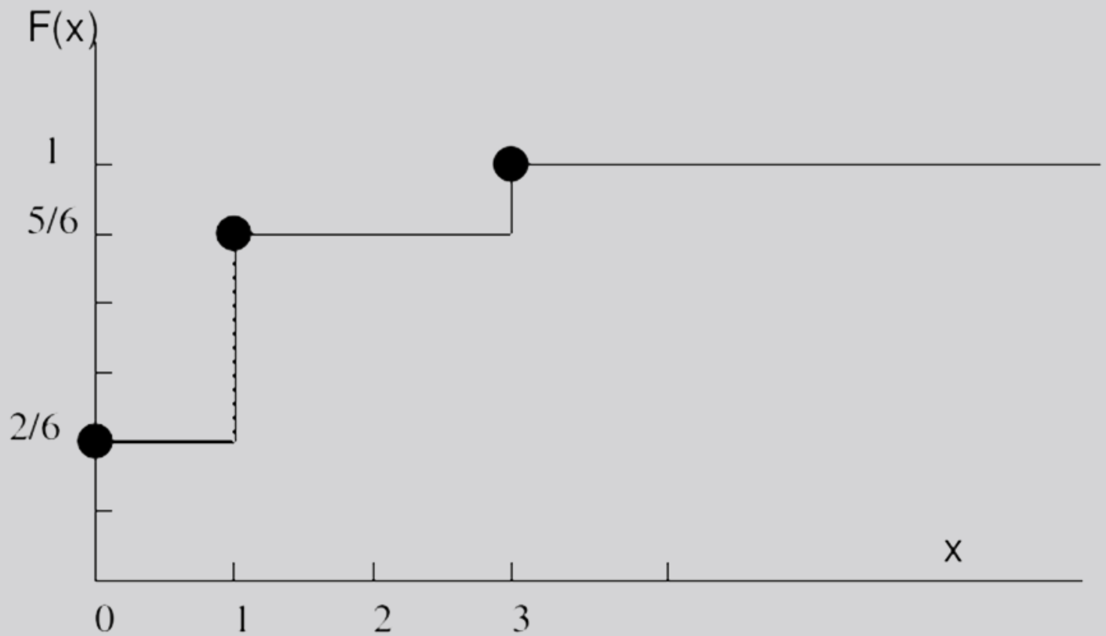
$$F(2.4) = F(M \leq 2.4) = f(0) + f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Distribusi peluang *M* adalah:

$$F(M) = \begin{cases} 0 \;\; untuk \;\; m < 0 \\ \frac{1}{3} \; untuk \; 0 \leq m < 1 \\ \frac{5}{6} \; untuk \; 1 \leq m < 3 \\ 1 \; untuk \; m \geq 3 \end{cases}$$

Distribusi Peluang Diskrit (6)

- Grafik:



Gambar 2.1.1 Nilai Distribusi Kumulatif *F(x)* untuk Contoh Penjaga Helm

Latihan [2]

- If a car agency sells 50% of its inventory of a certain foreign car equipped with side airbags, find a formula for the probability distribution of the number of cars with side airbags among the next 4 cars sold by the agency.

Latihan [3]

Find the cumulative distribution function of the random variable X in Latihan [2].

Using $F(x)$, verify that $f(2) = 3/8$.

Variabel Random Kontinu

Variabel random kontinu adalah peluang yang bernilai nol pada suatu titik. Oleh karena itu, distribusi peluang tidak dapat dituliskan dalam bentuk tabel.

Jika *X* kontinu maka:

$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b)$$

Dan dihitung sebagai berikut:

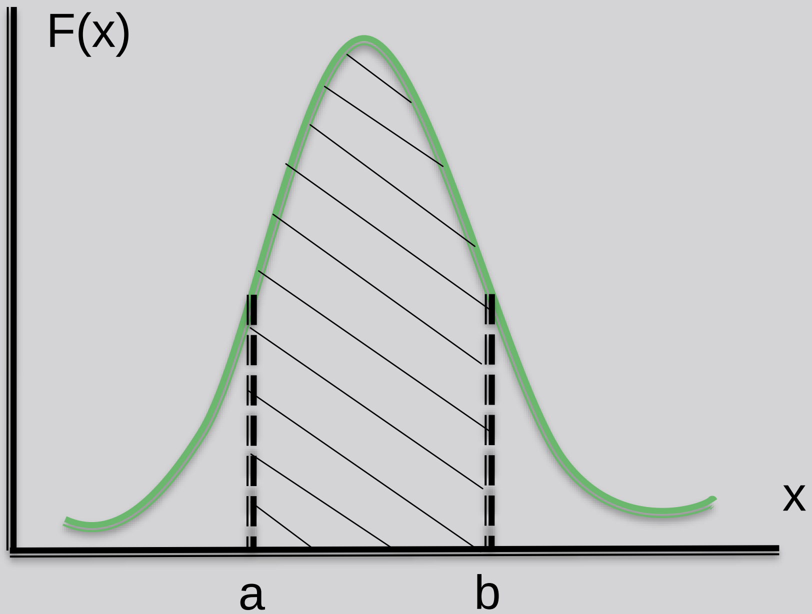
$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Definisi

Fungsi $f(x)$ adalah **fungsi densitas peluang** untuk variabel kontinu X, didefinisikan pada bilangan real
R, jika:

1. $f(x) \geq 0$, di mana x elemen R
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Grafik Fungsi Peluang



Gambar 2.2.1 P($a < X < b$)

Contoh 1 (Example 11)

Kesalahan pengukuran temperatur dinyatakan dengan variabel random *X*, dengan fungsi densitas yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3 & \text{, -1 < } x \text{ < 2} \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

a. Periksa syarat kedua dari definisi fungsi densitas peluang.
b. Hitunglah P(0 < *X* ≤ 1).

Jawab 1

a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$

b. $P(0 < X \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9}$

Distribusi Kumulatif Kontinu

- Definisi:

  Distribusi kumulatif *F*(*x*) dari variabel random kumulatif *X* dengan distribusi peluang adalah:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \text{ and } f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Contoh 2 (Example 12)

Dari fungsi densitas peluang pada Contoh 1, tentukan *F*(*x*) (distribusi kumulatif), kemudian gunakan untuk menghitung P(0 < *X* ≤ 1).

Jawab:

Untuk -1 < *x* < 2

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{t^2}{3} dt = \frac{(x^3+1)}{9}$$

Sehingga

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -1 \\ (x^3+1)/9 & , -1 < x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

Untuk menghitung P(0 < *X* ≤ 1)

$$P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Latihan [4]

For the density function of Example 11, find $F(x)$, and use it to evaluate $P(0 < X \leq 1)$.

Distribusi Peluang Gabungan

Jika X dan Y adalah dua variabel random diskrit, maka distribusi peluang untuk kejadian simultan dapat direpresentasikan dengan fungsi $f(x, y)$ untuk setiap pasangan (x, y).

Fungsi ini disebut dengan **distribusi peluang gabungan** dari variabel random X dan Y.

Untuk kasus diskrit dituliskan:

$$f(x, y) = \mathrm{P}(X = x,\ Y = y)$$

Definisi Formal: Distribusi Peluang Gabungan Diskrit

Fungsi $f(x, y)$ adalah distribusi peluang gabungan atau fungsi masa peluang dari variabel random diskrit X dan Y jika:

1. $f(x, y) \geq 0$ untuk semua (x, y)
2. $\sum_{x}\sum_{y} f(x, y) = 1$
3. $P(X = x, Y = y) = f(x, y)$

Untuk daerah sembarang A dalam bidang xy,

$$P[(x, y) \in A] = \sum_{A}\sum f(x, y)$$

Contoh 3 (Example 14)

Dua *ballpoint* diambil dari kotak yang berisi 3 warna biru, 2 warna merah, dan 3 warna hijau.
Jika X menyatakan jumlah warna biru dan Y menyatakan jumlah warna merah, tentukan:

a. Fungsi peluang gabungan $f(x, y)$ dan

b. $P[(x,y) \in A]$, di mana A adalah daerah $\{(x, y) | x+y \leq 1\}$

Jawab 3 (1)

a. Nilai pasangan yang mungkin dari (x, y) adalah (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (0, 2).
Jumlah semua kemungkinan pengambilan adalah $\binom{8}{2} = 28$.
Dalam bentuk tabel dapat dituliskan:

$f(x, y)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	Total Baris
$y = 0$	3/28	9/28	3/28	15/28
$y = 1$	3/14	3/14		3/7
$y = 2$	1/28			1/28
Total Kolom	5/14	15/28	3/28	1

Tabel Distribusi Peluang Gabungan

Jawab 3 (2)

Dituliskan dalam bentuk rumus adalah:

$$f(x,y) = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2-x-y \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Untuk $x = 0, 1, 2$; $y = 0, 1, 2$; $0 \le x + y \le 2$.

b. $$P[(X,Y) \in A] = P(X + Y \le 1)$$
$$= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0)$$
$$= \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{9}{28}$$
$$= \frac{9}{14}$$

Definisi Formal: Fungsi Densitas Gabungan Kontinu

Fungsi $f(x, y)$ adalah fungsi densitas gabungan dari variabel random kontinu X dan Y jika:

1. $f(x, y) \geq 0$ untuk semua (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy = 1$
3. $P[(X < Y) \in A] = \iint_A f(x, y)\,dxdy$

Untuk sembarang daerah A dalam bidang xy.

Contoh 4 (Example 15)

Diberikan fungsi densitas gabungan dari variabel random kontinu *X* dan *Y* sebagai berikut:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

a. Periksa kondisi kedua dari definisi fungsi densitas gabungan.

b. Tentukan P[(*X*, *Y*) elemen *A*],

A adalah daerah $\{(x, y) \mid 0 < x < ½, ¼ < y < ½\}$.

Jawab 4

a. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dxdy$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

b. $$P[(X,Y)\in A] = P[0 < x < 1/2, 1/4 < y < 1/2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)$$

$$= \frac{13}{160}$$

Definisi Distribusi Marginal

Distribusi marginal dari *X* dan *Y* adalah

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \text{ dan } h(y) = \sum_{x} f(x,y)$$

Untuk kasus diskrit, dan

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \text{dan} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Untuk kasus kontinu.

Contoh 5 (Example 16)

Dari tabel berikut, tentukan distribusi marginal X dan Y.

$f(x, y)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	Total Baris
$y = 0$	3/28	9/28	3/28	15/28
$y = 1$	3/14	3/14		3/7
$y = 2$	1/28			1/28
Total Kolom	5/14	15/28	3/28	1

Tabel Distribusi Peluang Gabungan

Jawab 5

Untuk variabel random *X* dapat dihitung sebagai berikut:

$$P(X = 0) = g(0) = \Sigma\, f(0, y) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2)$$
$$= (3/28) + (3/14) + (1/28) = 5/14$$

$$P(X = 1) = g(1) = \Sigma\, f(1, y) = f(1, 0) + f(1, 1) + f(1, 2)$$
$$= (9/28) + (3/14) + 0 = 15/28$$

$$P(X = 2) = g(2) = \Sigma\, f(2, y) = f(2, 0) + f(2, 1) + f(2, 2)$$
$$= (3/28) + 0 + 0 = 3/28$$

Dalam bentuk tabel sebagai berikut:

x	0	1	2
$g(x)$	5/14	15/28	3/28

Contoh 6 (Example 17)

Tentukan *g*(*x*) dan *h*(*y*) dari contoh sebelumnya.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x+3y)dy = \frac{4x+3}{5}$$

Untuk 0 ≤ *x* ≤ 1 dan *g(x)* = 0 untuk *x* yang lain.

Dengan cara yang sama,

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{5}(2x+3y)dx = \frac{2(1+3y)}{5}$$

Untuk 0 ≤ *y* ≤ 1 dan *h(y)* = 0 untuk *y* lain.

Definisi Distribusi Bersyarat

Misalkan *X* dan *Y* adalah dua variabel random diskrit atau kontinu.

Distribusi bersyarat dari variabel random *Y*, diberikan *X* = *x* adalah

$$f(y|x) = f(x,y) / g(x),\ g(x) > 0$$

Distribusi bersyarat dari variabel random *X*, diberikan *Y* = *y* adalah

$$f(x|y) = f(x,y) / h(y),\ h(y) > 0$$

Contoh 7 (Example 18)

Dari contoh sebelumnya, tentukan distribusi bersyarat dari X diberikan $Y = 1$, dan gunakan itu hitung P(X=0|Y=1).

Jawab:

Akan dihitung $f(x|y)$, di mana $y = 1$

$$h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x, 1) = (3/14) + (3/14) + 0 = 3/7$$

Kemudian dihitung:

$$f(x|1) = f(x, 1) / h(1) = (7/3)\, f(x, 1),\ x = 0, 1, 2$$

Sehingga diperoleh:

$$f(0|1) = (7/3)\, f(0, 1) = 1/2 = P(X=0|Y=1)$$
$$f(1|1) = (7/3)\, f(1, 1) = 1/2$$
$$f(2|1) = (7/3)\, f(2, 1) = 0$$

Contoh 8 (Example 20)

Diberikan fungsi densitas gabungan:

$$f(x, u) = \begin{cases} x(1+3y^2)/4 & , 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Tentukan $g(x)$, $h(y)$, $f(x|y)$, kemudian hitung $P(1/4 < X < 1/2 \mid Y = 1/3)$.

Jawab 8

Dari definisi

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (x)\left(\frac{(1+3y^2)}{4}\right)dy = \frac{x}{2}, 0 \le x \le 2$$

Dengan cara yang sama:

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 x\left(\frac{1+3y^2}{4}\right)dx = \frac{1+3y^2}{2}, 0 \le y \le 1$$

Kemudian dihitung:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x}{2}$$

dan

$$P(1/4 < X < 1/2 \mid Y = 3) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2}dx = \frac{3}{64}$$

Statistically Independent (Bebas Statistik)

- Misal X dan Y , dua variable random, diskrit atau kontinu, dengan $f(x,y)$ = distribusi peluang gabungan, $g(x)$ dan $h(y)$ = distribusi marginal. Variabel random X, Y disebut bebas statistik jika
  - $f(x,y) = g(x).\ h(y)$

Contoh (Example 21)

- Perlihatkan variable random Example 14 tidak bebas statistic.
- Jawab:

Let us consider the point $(0, 1)$. From Table 3.1 we find the three probabilities $f(0,1)$, $g(0)$, and $h(1)$ to be

$$f(0,1) = \frac{3}{14},$$

$$g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14},$$

$$h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}.$$

Clearly,

$$f(0,1) \neq g(0)h(1),$$

and therefore X and Y are not statistically independent. $\blacksquare$

Statistically Independent [2]

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah n variabel acak, diskrit or kontinu, dengan distribusi peluang gabungan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan distribusi marginal $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$.

Variabel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *bersifat* **statistically independent** jika:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

untuk semua $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dalam batasan nilainya.

Latihan [5]

The joint density for the random variables (X, Y), where X is the unit temperature change and Y is the proportion of spectrum shift that a certain atomic particle produces, is

$f(x, y) = 10xy^2$, $0 < x < y < 1$,

$f(x, y) = 0$, elsewhere

(a) Find the marginal densities $g(x)$, $h(y)$, and the conditional density $f(y|x)$.

(b) Find the probability that the spectrum shifts more than half of the total observations, given that the temperature is increased by 0.25 unit.

Latihan [6]

Suppose that the shelf life, in years, of a certain perishable food product packaged in cardboard containers is a random variable whose probability density function is given by

$f(x) = e^{-x}, x > 0$

$f(x) = 0$, elsewhere

Let X_1, X_2, and X_3 represent the shelf lives for three of these containers selected independently and find $P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2)$.

PR

- Bab 3 : No. 11, 27, 40