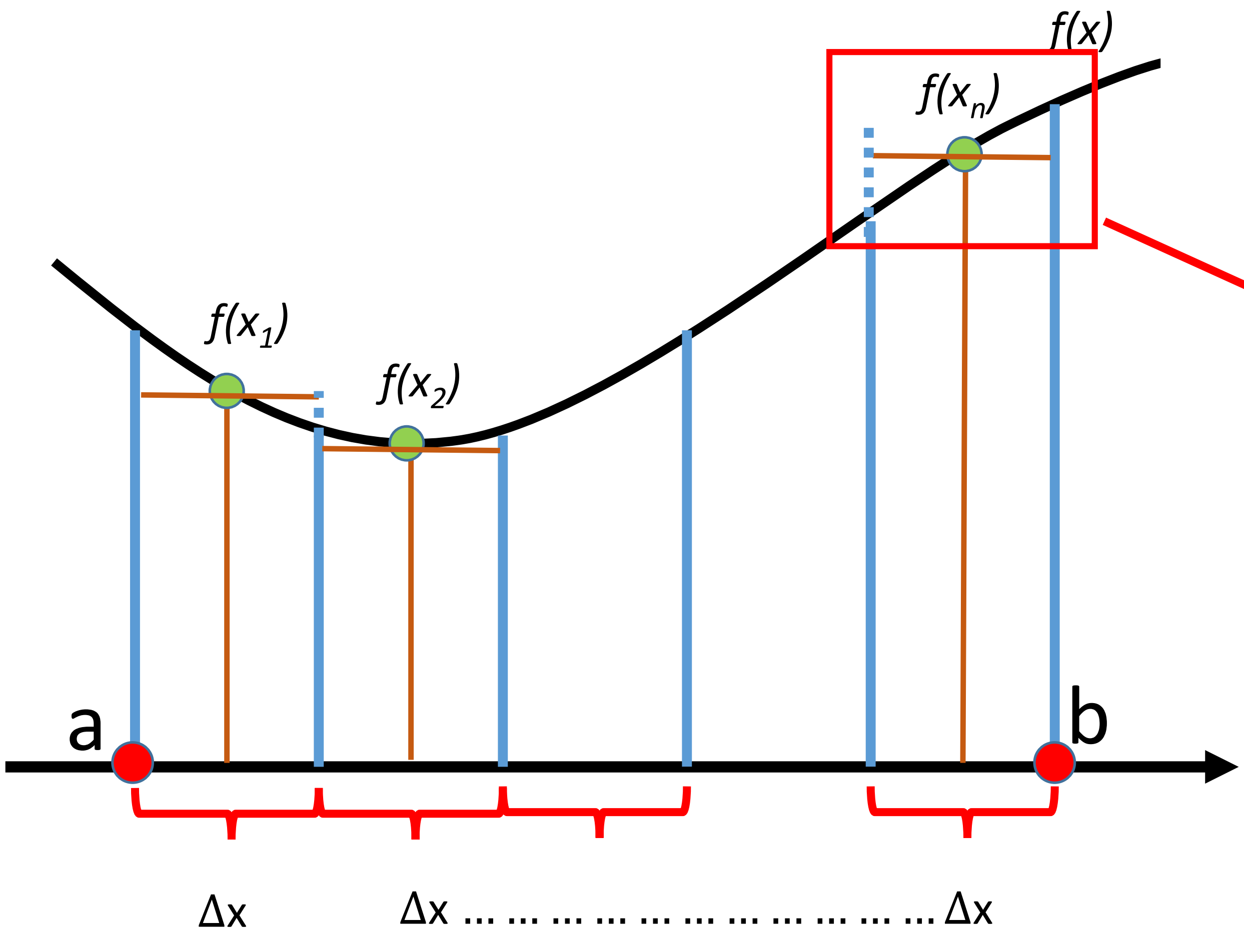
Całkowanie numeryczne metodą prostokątów oraz metodą Gaussa

dr inż. Kustra Piotr

WIMiIP, KISiIM, AGH

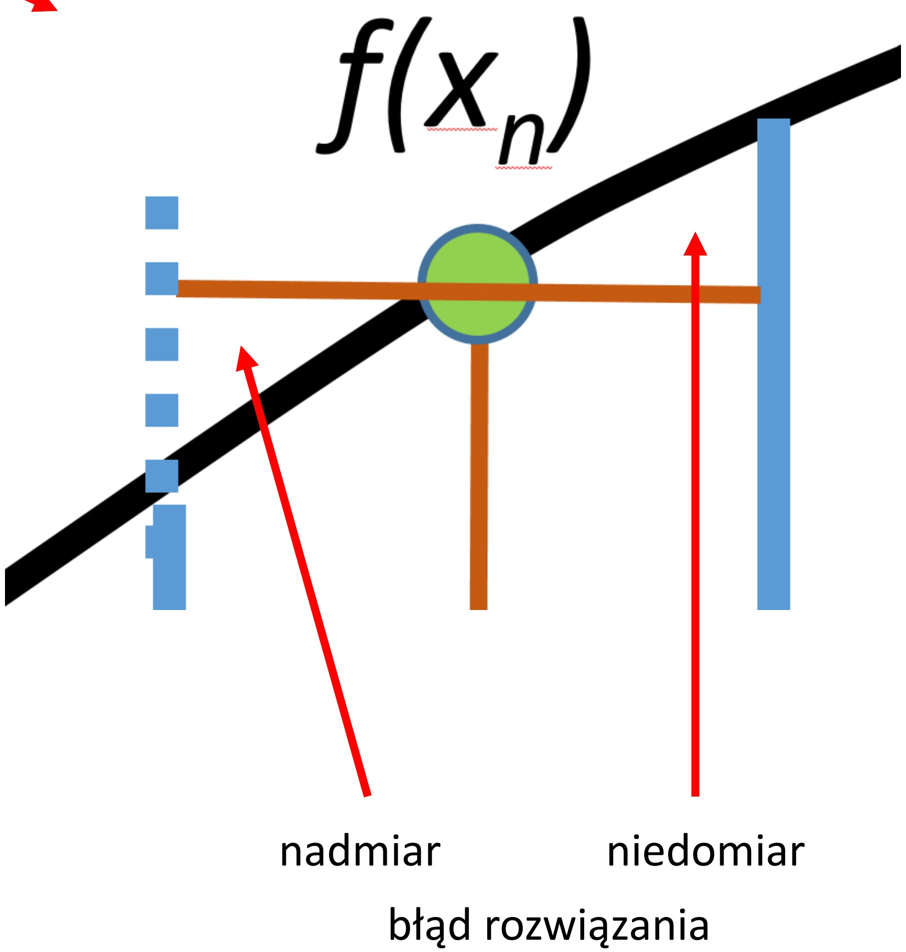
B5, pokój 710

Całkowanie metodą prostokątów polega na podziale przedziału całkowania <**a** ; **b**> na **n** części a następnie obliczeniu wartości funkcji w środku przedziału oraz przemnożeniu jej przez długość przedziału całkowania.

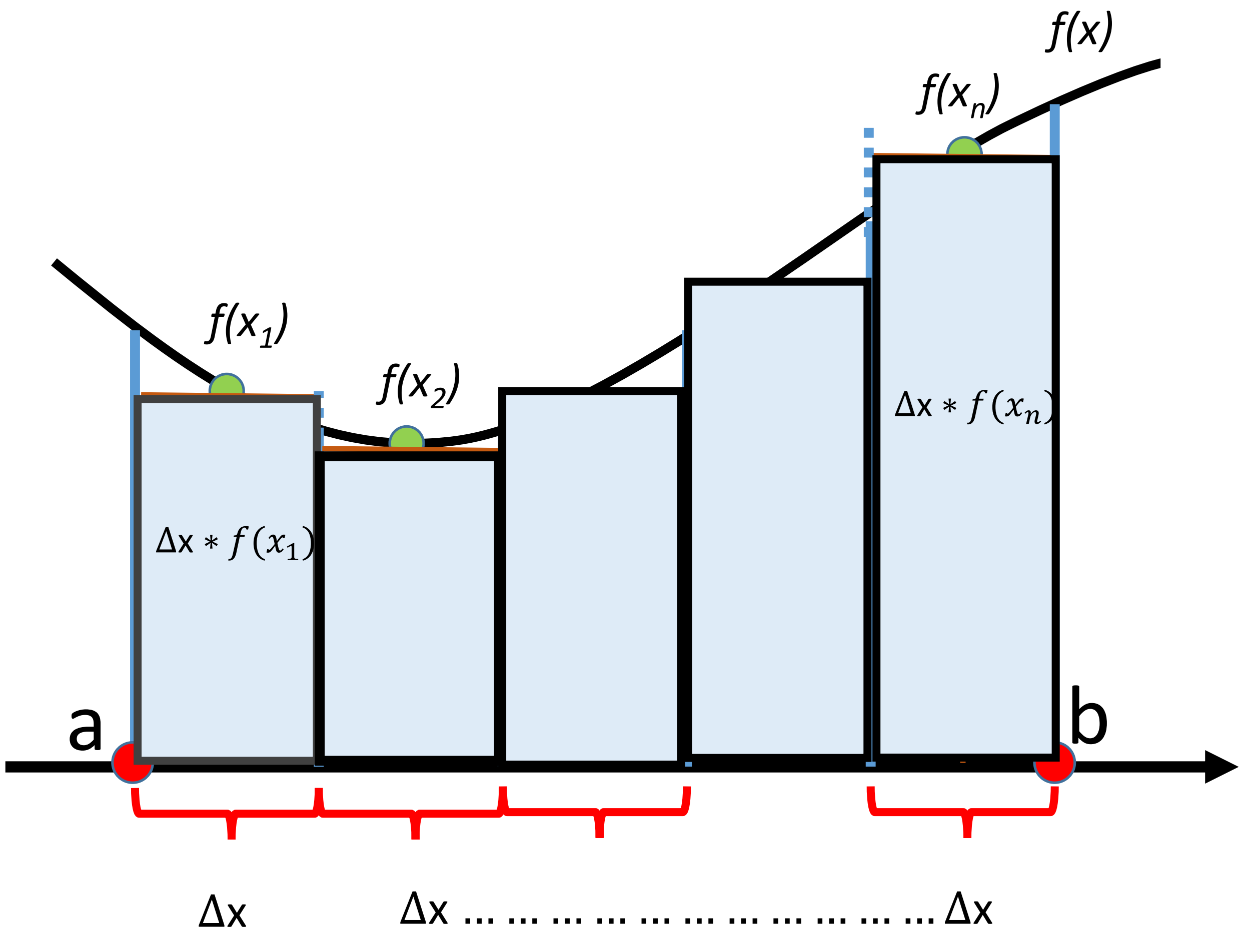


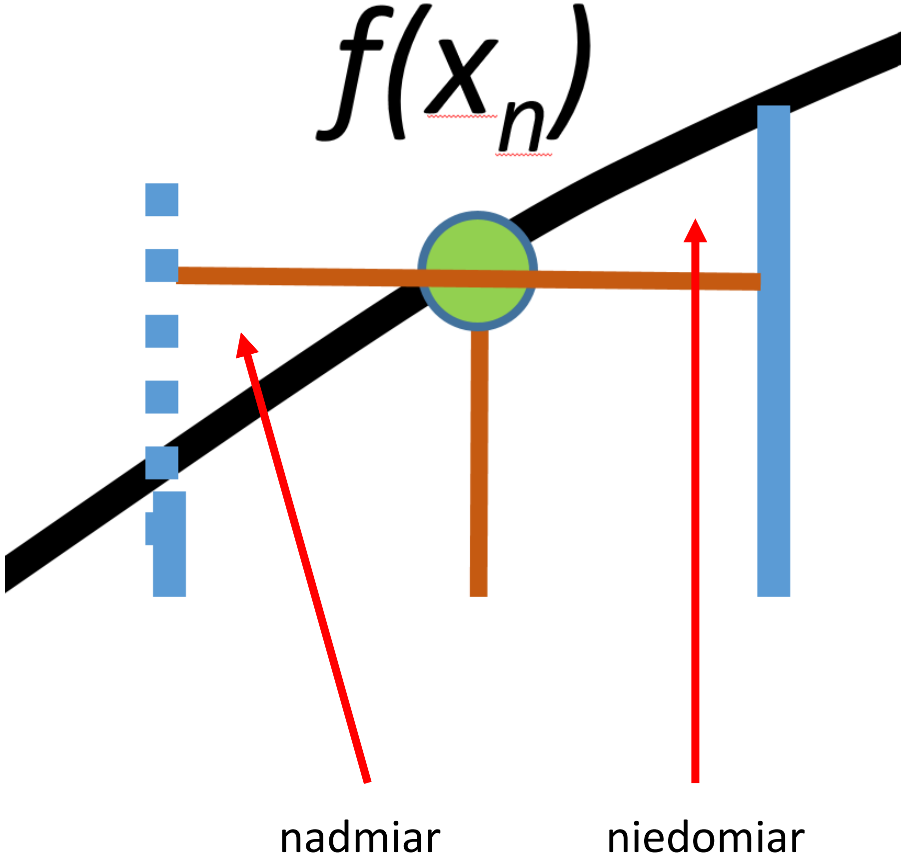
$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \ldots .\ \Delta x * f(x_n)$$



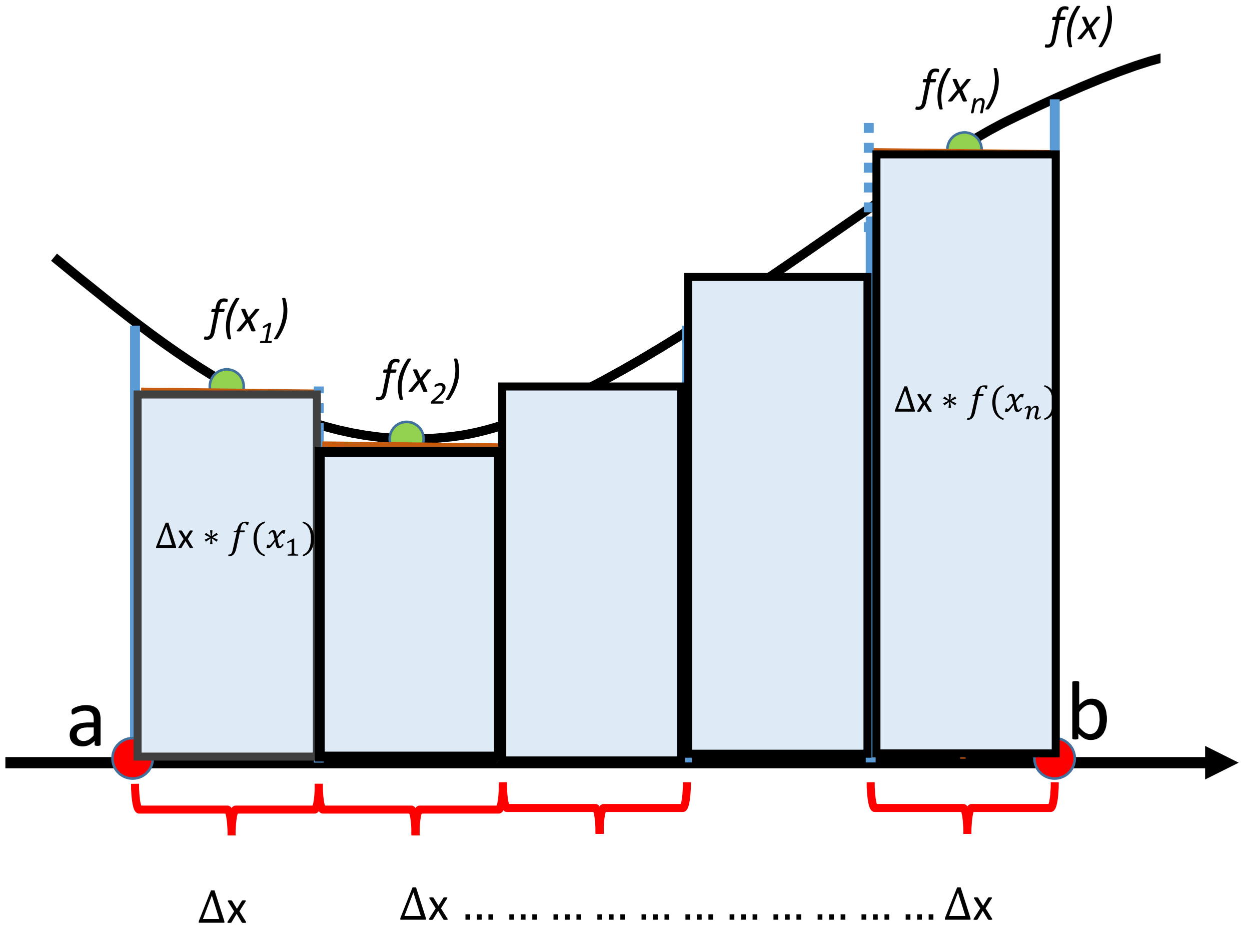
Wynikiem całkowania jest suma pól prostokątów. Pole jednego prostokąta obliczane jest w sposób następujący - Δx czyli wielkość przedziału całkowania pomnożona przez wartość funkcji w połowie przedziału całkowania





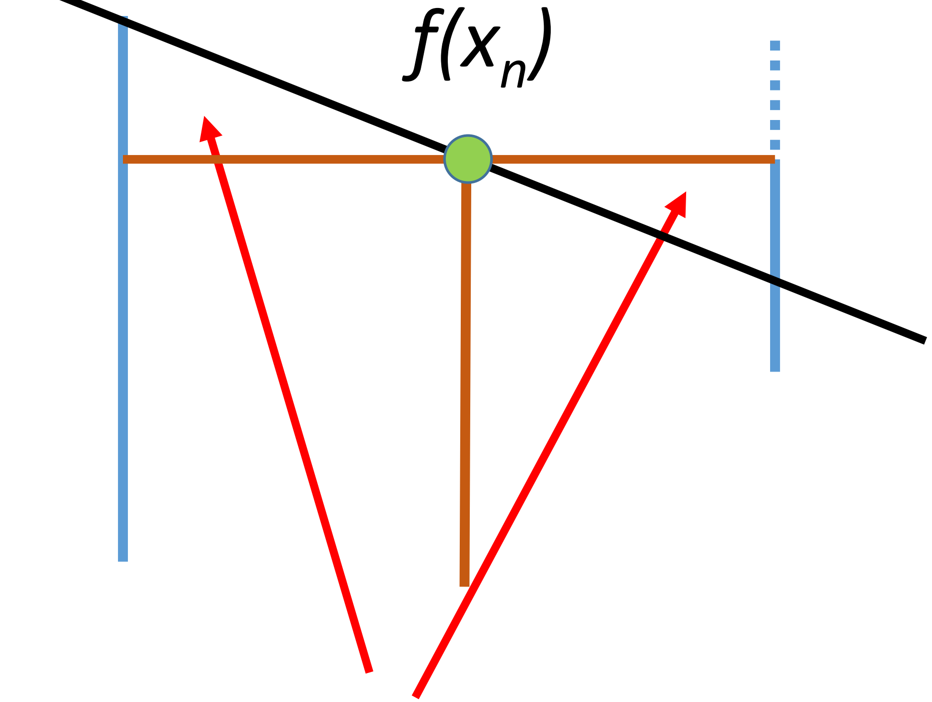
$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \ldots.\ \Delta x * f(x_n)$$

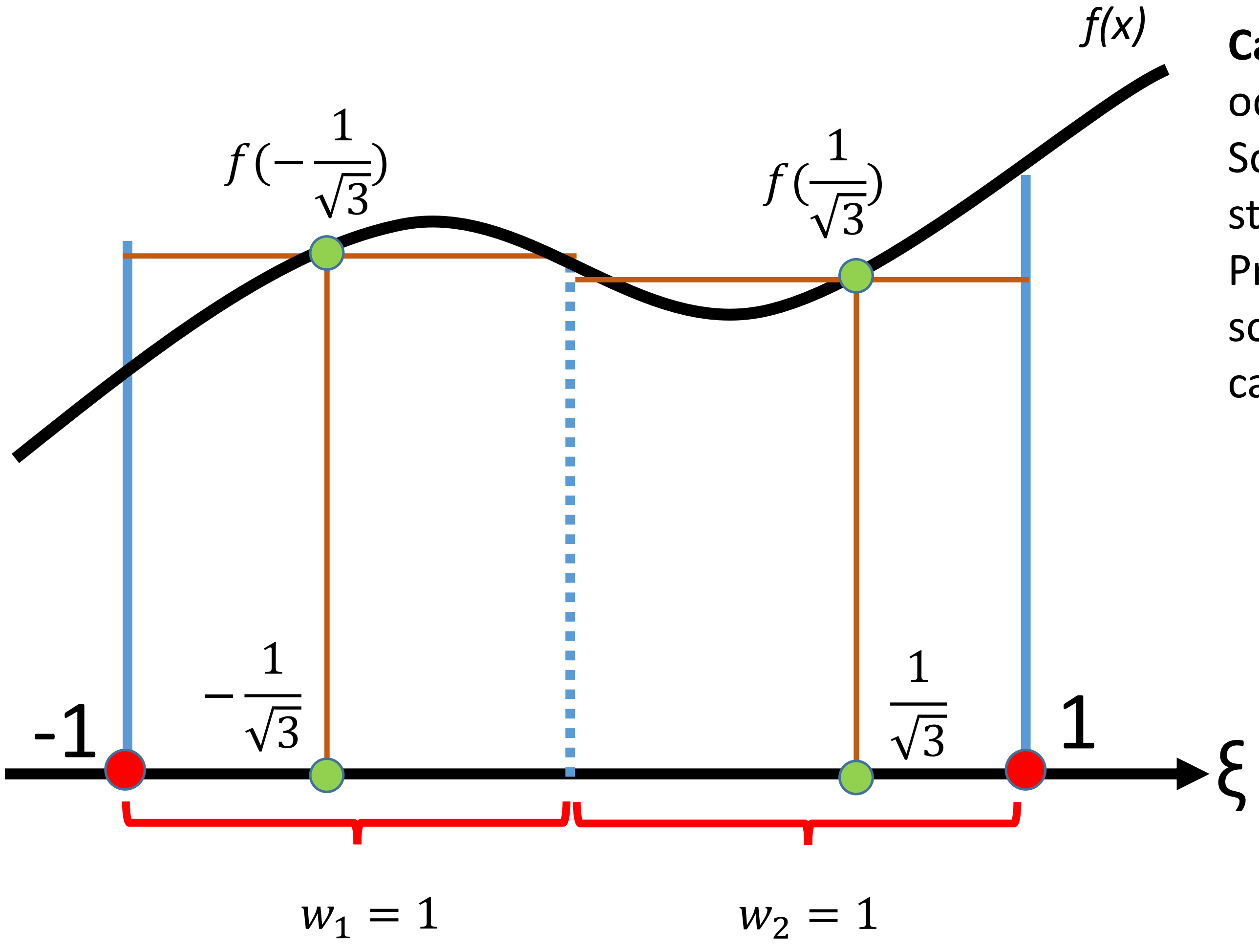


$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x * f(x_1) + \Delta x * f(x_2) + \ldots .\ \Delta x * f(x_n)$$



Dla funkcji liniowej te trójkąty są identyczne w związku z tym nadmiar jest równy niedomiarowi a wynik całkowania różni się od analitycznego o dokładność liczb.



$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2)$$

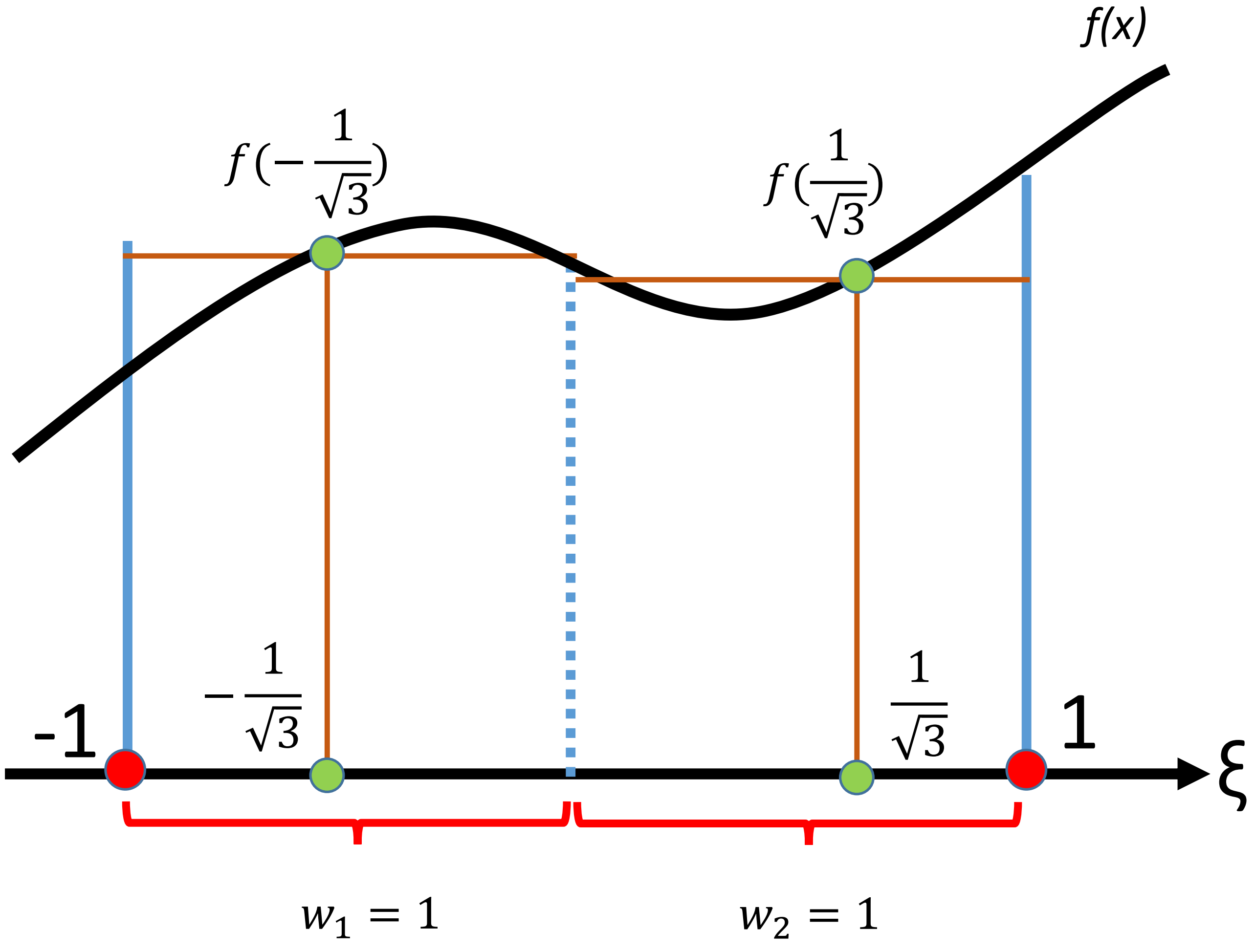
Całkowanie metodą Gaussa

odbywa się w przedziale <-1; 1>

Schematy całkowania zostały opracowane oraz stabelaryzowane. Nazywane są one kwadraturami Gaussa. Przedstawiono przykład dla n=1 czyli dwupunktowego schematu całkowania. X_k oznaczono współrzędną punktu całkowania a A_k wagę punktu całkowania.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1;2	∓ 0.339981	0.652145
4	0;4	∓ 0.906180	0.236927
	1;3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889



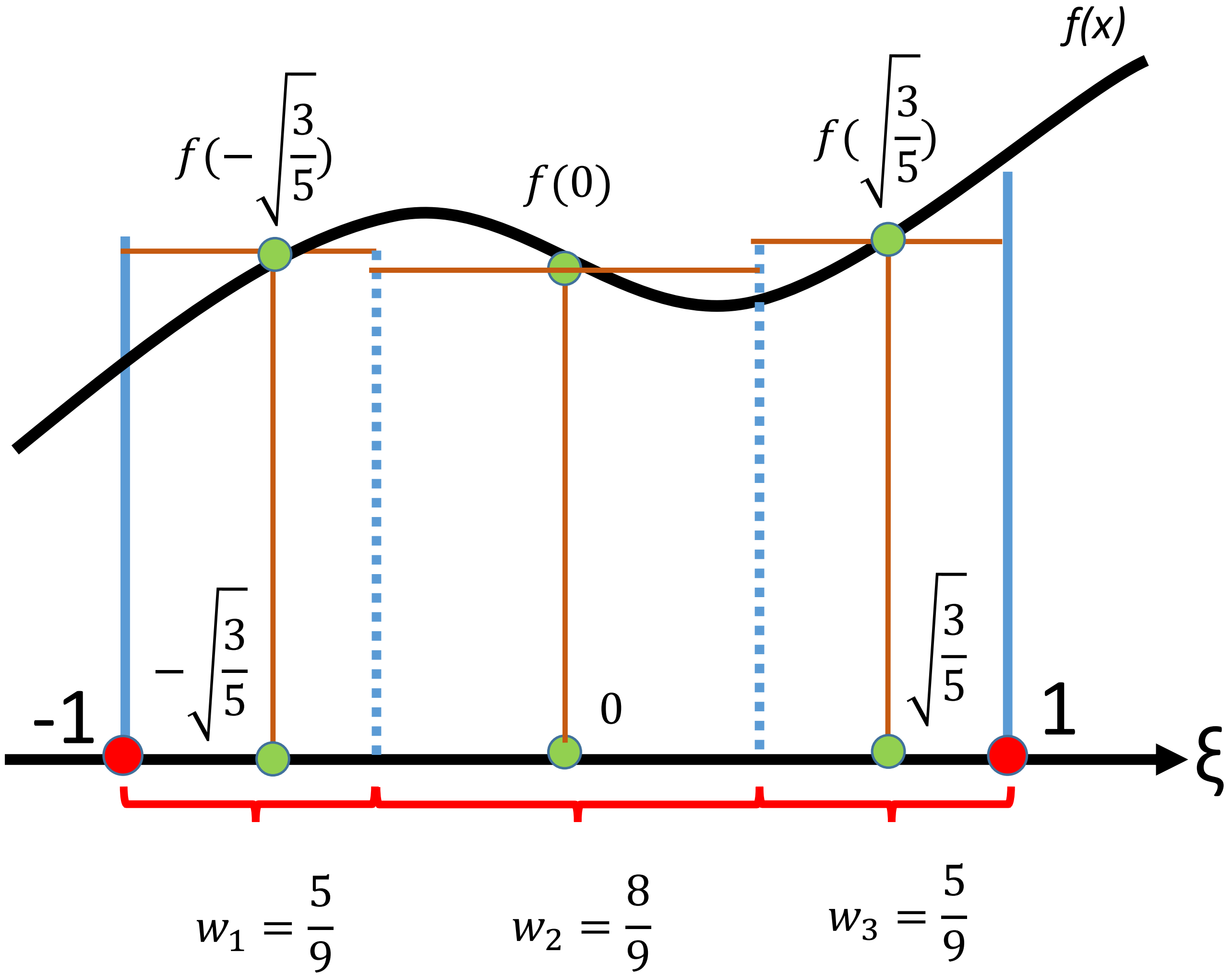
Suma wag w przedziale -1; 1 jest równa 2. Wynik całkowania sprowadza się do określenia wartości funkcji w punkcie całkowania przemnożone przez wagę punktu całkowania. Waga jest analogią Δx dla całkowania metodą prostokątów.

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2)$$

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1;2	∓ 0.339981	0.652145
4	0;4	∓ 0.906180	0.236927
	1;3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889

Analogiczny przykład dla n=2 czyli 3 punktów całkowania. Suma wag równa się 2.



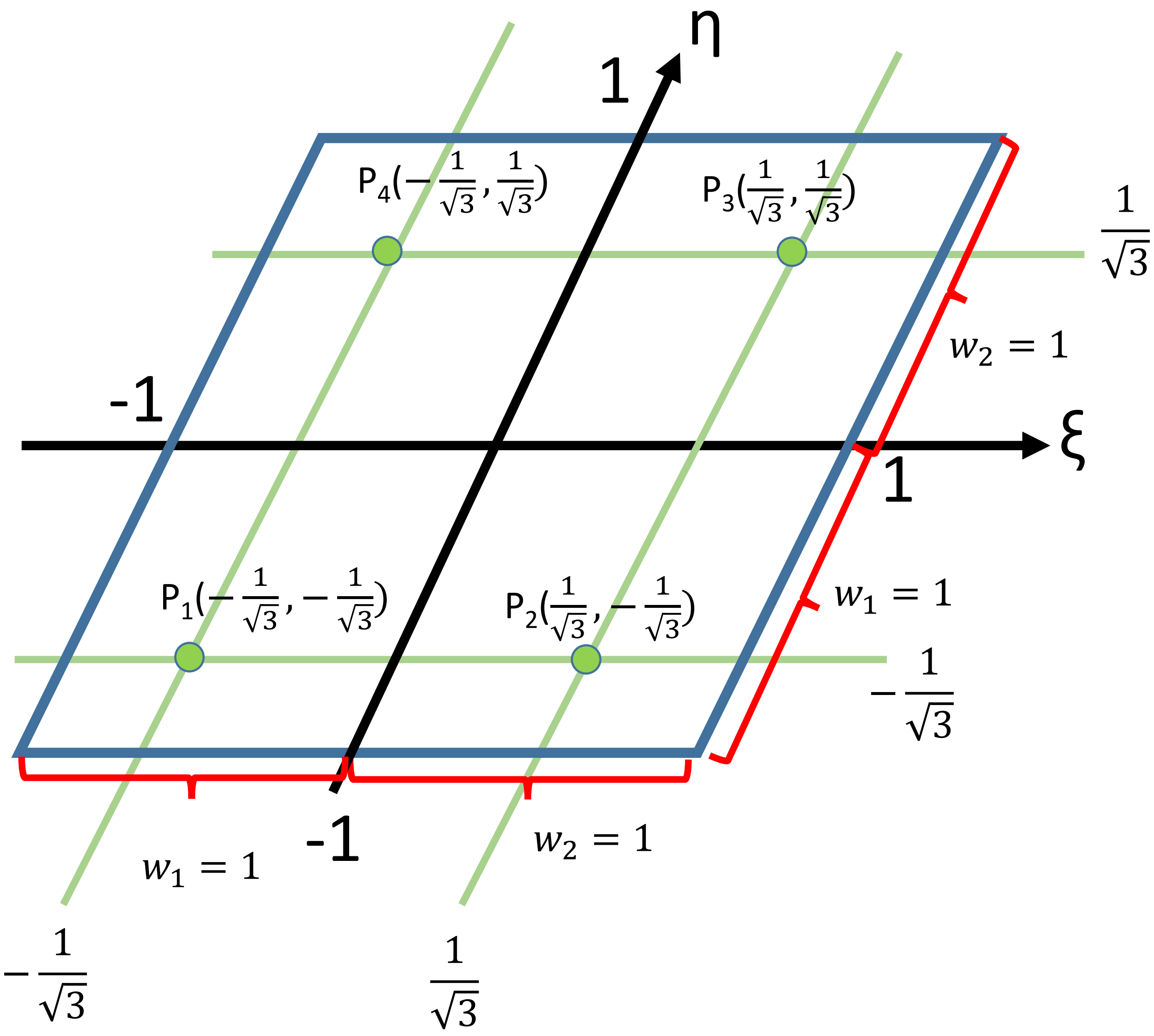
$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2) + w_3 * f(\xi_3)$$

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i * f(\xi_i)$$

Gdzie: n – liczba punktów całkowania

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓0.861136	0.347855
	1;2	∓0.339981	0.652145
4	0;4	∓0.906180	0.236927
	1;3	∓0.538469	0.478629
	2	0	0.568889



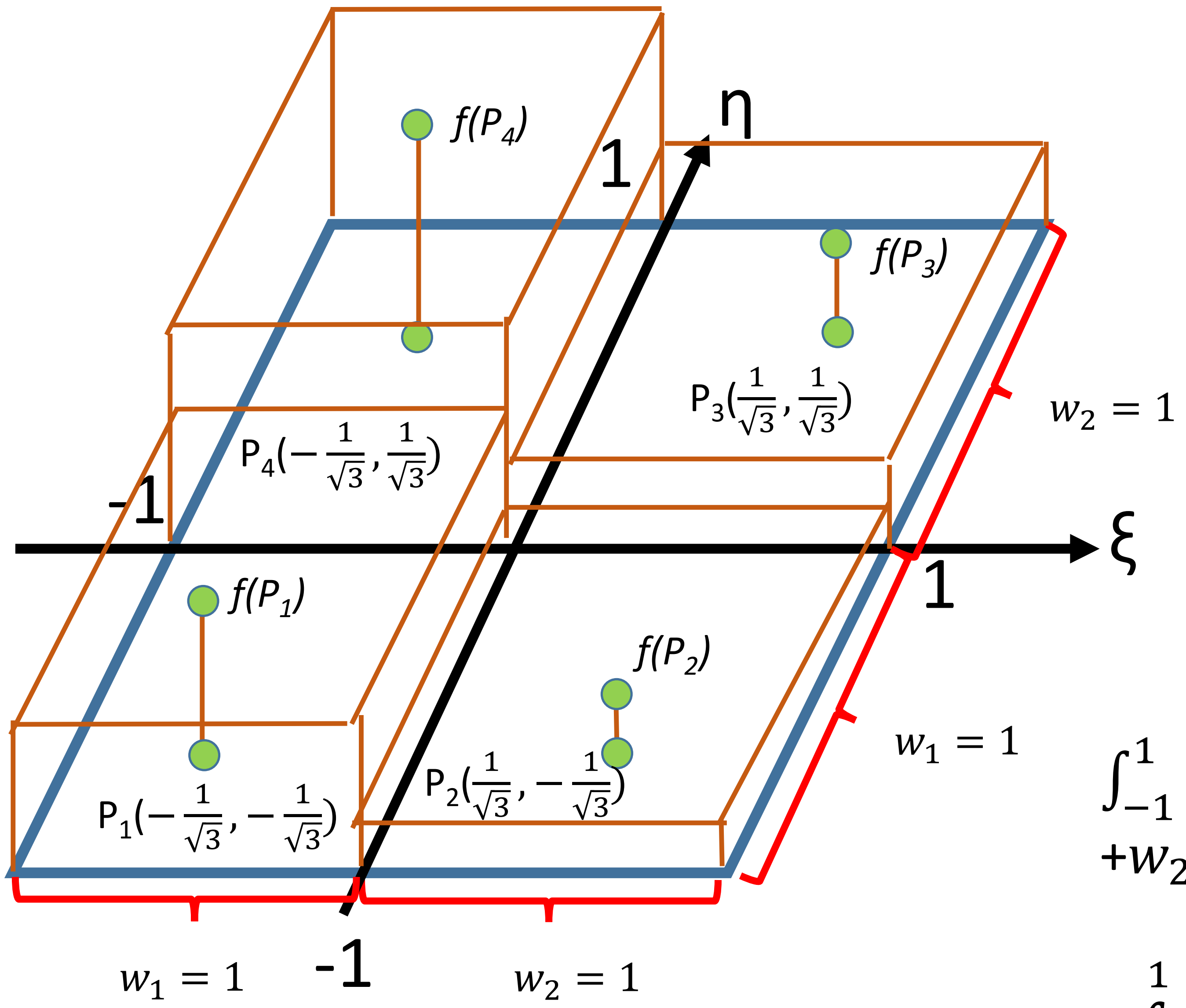
Analogiczny przykład całkowania w przestrzeni 2d dla n=1 czyli 2 punktów całkowania. Suma wag na każdej z krawędzi równa się 2. W tym przypadku funkcja podcałkowa jest funkcją dwóch zmiennych:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

Na schemacie podano współrzędne punktów całkowania oraz wartości wag.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

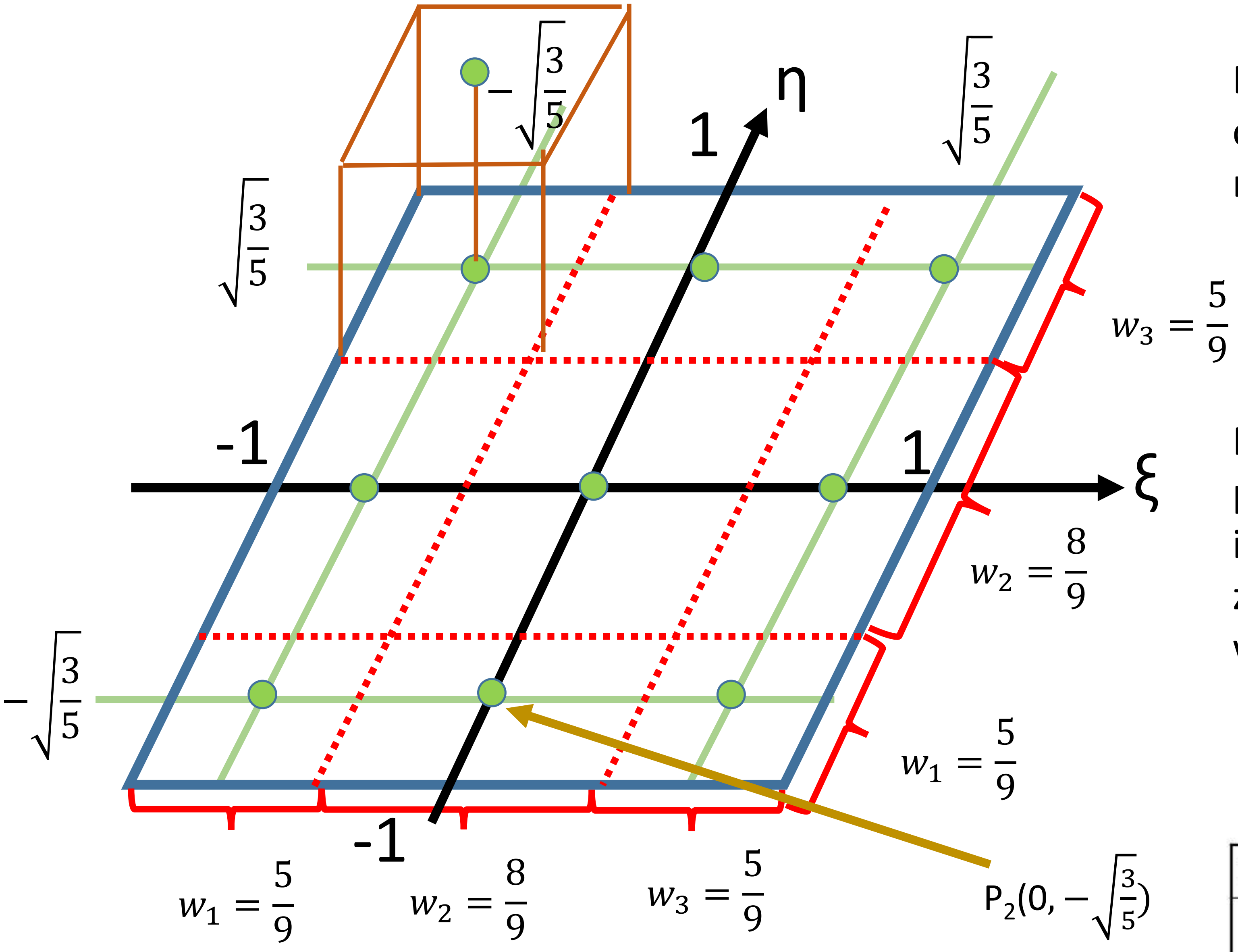
N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9



Wynikiem całkowania w każdym z punktów całkowania jest prostopadłościan o polu podstawy definiowanym wartością wag. Waga razy waga definiuje pole podstawy a wysokość to wartość funkcji w punkcie całkowania.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = w_1 w_1 f(P_1) + w_1 w_2 f(P_2) + w_2 w_2 f(P_3) + w_1 w_2 f(P_4)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_i)$$



Dla n=2 czyli trójpunktowego schematu całkowania schemat przedstawiono na rysunku.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

Należy zauważyć, że wielkość poszczególnych pól (waga razy waga) jest inna. Dlatego podczas implementacji należy zwrócić szczególną uwagę definiując i wybierając wagi.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9

Zadanie domowe
Podano następujące funkcje:

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 6$$

$$f(x,y) = 5x^2y^2 + 3xy + 6$$

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1;2	∓ 0.339981	0.652145

- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 1d stosują 2 punktowy schemat całkowania.
- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 1d stosują 3 punktowy schemat całkowania.
- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 2d stosują 2 punktowy schemat całkowania.
- Zaimplementuj całkowanie metoda Gaussa w przestrzeni 2d stosują 3 punktowy schemat całkowania.
- Rozwiąż całki analitycznie i porównaj wynik z wynikiem numerycznym.

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i * f(\xi_i) \qquad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi\, d\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_i)$$