Metoda elementów skończonych

Tomasz Ligęza
Informatyka Techniczna
GL5

Cel projektu:

Stworzenie oprogramowania aproksymującego temperatury w węzłach siatki MES dla konkretnego obiektu w przestrzeni 2D.

Wstęp teoretyczny:

MES (Metoda Elementów Skończonych) - polega na podzieleniu rozpatrywanego ciała na siatkę elementów skończonych. Pozwala na przybliżone wyznaczenie temperatur w węzłach takiej siatki poprzez rozwiązanie równań różniczkowych.

Równanie Fouriera określa przepływ ciepła w stanie ustalonym:

$$div\left(k\left(t\right)grad\left(t\right)\right)+Q=0$$

W naszym przypadku rozpatrywanym obiektem jest obiekt dwuwymiarowy wykonany z materiałów izotropowych. Po przekształceniu oraz dyskretyzacji obszaru (podziale na elementy skończone) okazuje się, że zadaniem jest rozwiązanie funkcjonału.

$$J=\int_V\left(\frac{k}{2}\left(\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T\{t\}\right)^2+\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\{t\}\right)^2+\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\{t\}\right)^2\right)-Q\{N\}^T\{t\}\right)dV+$$

$$+\int_S\frac{\alpha}{2}\left(\{N\}^T\{t\}-t_\infty\right)^2dS+\int_S q\{N\}^T\{t\}dS.$$

Aby rozwiązać to zadanie musimy rozwiązać układ równań:

$$\left[H\right]\{t\}+\{P\}=0,$$

gdzie macierz [H] oraz wektor {P} są równe odpowiednio:

$$\left[H\right]=\int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\right)dV+$$

$$+\int_S\alpha\{N\}\{N\}^T dS,$$

$$\{P\}=-\int_S\alpha\{N\}t_\infty dS-\int_V Q\{N\}dV+\int_S q\{N\}dS$$

Temperaturę wyznaczamy ze schematu:

$$\left([H]+\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}-\left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}=0$$

,

gdzie:

$$[C]=\int_V c\rho\{N\}\{N\}^T\,dV$$

.

Realizacja projektu:

Program został napisany w języku Java z wykorzystaniem biblioteki org.apache.commons:commons-math3.

Program został podzielony na kilka klas:

- **Node** - reprezentującą węzeł siatki,
- **Element** - reprezentującą 4-węzłowy element siatki,
- **Grid** - reprezentujący siatkę elementów,
- **IntegrationScheme** - reprezentującą schemat całkowania użyty w aplikacji oraz zawierający ilość punktów całkowania, ich współrzędne oraz wagi,
- **Element4x2D** - zawierającą wartości funkcji kształtu i ich pochodnych po ξ i η w punktach całkowania,
- **Side** - zawierającą współrzędne całkowania na ścianach elementów, oraz wartości funkcji kształtu w tych punktach,
- **Algorithms** - zawierającą algorytmy wykonywane przez klasę grid,
- **Configuration** - singleton wczytujący konfigurację i przechowujący ją - zawiera stałe takie jak ciepło właściwe, współczynnik przewodzenia itp.

Klasa Node zawiera, współrzędne x oraz y, flagę warunku brzegowego oraz aktualną temperaturę w węźle.

Klasa Element składa się z listy ID węzłów, lokalną macierz H, lokalną macierz H_{BC}, lokalny wektor P oraz lokalną macierz C.

Klasa Grid zawiera zmienne takie jak: lista węzłów, lista elementów, globalna macierz H, globalna macierz C, globalny wektor P, oraz aktualny czas iteracji.
Zawiera również metody:

- calculate() - obliczającą macierze H, C oraz wektor P w każdym z elementów,
- aggregate() - agregującą macierze lokalne do macierzy globalnych,
- iterate() - wykonanie kolejnej iteracji obliczeń oraz zwiększenie aktualnego czasu o skok czasu przechowywany w konfiguracji,
- printTemperatures() - wypisującą wszystkie temperatury siatki lub tylko minimalną i maksymalną w zależności od konfiguracji.

Klasa Algorithms zawiera metody publiczne:

- jacobian() - obliczająca jakobian dla danego punktu całkowania w danym elemencie,
- calculateHAndCOfIntPoint() - obliczającą lokalną macierz H oraz C w danym punkcie całkowania dla danego elementu,
- calculateHbcAndP() - obliczającą lokalną macierz H_{BC} oraz wektor P dla wszystkich ścian danego elementu,

oraz prywatne:

- calculateSideHbc() - obliczającą macierz H_{BC} dla pojedynczej ściany,
- calculateSideP() - obliczającą wektor P dla pojedynczej ściany,
- calculateDetJ() - obliczającą wyznacznik macierzy jakobiego dla pojedynczej ściany.

Działanie programu:

1. Program w zależności od naszych intencji może wczytać prostą konfigurację z pliku tekstowego, bądź wyeksportowaną siatkę udostępnioną na zajęciach.
2. Zostaje wywołany konstruktor klasy grid, który wypełnia siatkę węzłami oraz elementami.
3. Tworzony jest obiekt klasy Element4x2D, który na podstawie przysłanego mu obiektu IntegrationScheme obliczy wartości funkcji kształtu oraz ich pochodnych po ξ i η.
4. Wywołana zostaje metoda calculate(), która oblicza lokalne wartości macierzy H, H_{BC} oraz C, a także wektora P w każdym z elementów.
5. Następuje agregacja lokalnych macierzy H (+ H_{BC}), C oraz wektora P do ich globalnych odpowiedników.
6. Na obiekcie klasy Grid wywoływana jest metoda printTemperatures(), aby wypisać temperatury przed startem symulacji.
7. W pętli ograniczonej czasem symulacji wywoływana jest na obiekcie klasy grid metoda iterate(), w której:
    a. tworzymy wektor aktualnych temperatur t_0,
    b. obliczamy macierz hDash i wektor pDash,
    c. rozwiązywany jest układ równań metodą dekompozycji LU,
    d. aktualizujemy temperatury w węzłach,
    e. wypisujemy temperatury.

Wnioski:

Poprzez zastosowanie metody elementów skończonych udało się w przybliżeniu obliczyć temperatury węzłów siatki zadanego obiektu. Na zrzutach ekranu poniżej w sekcji testów dostrzec możemy, że najszybciej nagrzewającymi się węzłami siatki są te położone w rogach elementu.

Wyniki są niemal identyczne do tych przedstawionych na stronie przedmiotu. Największe zanotowane przeze mnie błędy obliczeniowe pojawiają się w teście 5. (31x31_trapez), gdzie różnica pomiędzy wynikami moimi, a tymi umieszczonymi na stronie przedmiotu pojawia się na 2. miejscu po przecinku. Powodować to może użyta do obliczeń biblioteka.

Testy aplikacji:

1. Test aplikacji wczytującej konfigurację z pliku init.txt:

init.txt:

```
initialTemperature 100.0
simulationTime 500
simulationStepTime 50
ambientTemperature 1200.0
alfa 300.0
heightOfGrid 0.100
widthOfGrid 0.100
numberOfNodesOnHeight 4
numberOfNodesOnWidth 4
specificHeat 700.0
conductivity 25.0
density 7800.0
integrationScheme 2
```

```
Temperature after 0 seconds:

100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
100.00000 100.00000 100.00000 100.00000

Min temp: 100.00000 Max temp: 100.00000

Temperature after 50 seconds:

365.81547 249.01534 249.01534 365.81547
249.01534 110.03798 110.03797 249.01534
249.01535 110.03798 110.03798 249.01534
365.81547 249.01535 249.01534 365.81547

Min temp: 110.03797 Max temp: 365.81547

Temperature after 100 seconds:

502.59171 353.09987 353.09986 502.59171
353.09987 168.83702 168.83701 353.09987
353.09988 168.83703 168.83702 353.09987
502.59171 353.09988 353.09987 502.59171

Min temp: 168.83701 Max temp: 502.59171

Temperature after 150 seconds:

587.37267 434.59734 434.59733 587.37266
```

Istnieje również możliwość uruchomienia aplikacji z dodatkowymi logami:

```
Nodes:
Node(id=1, x=0.100000001, y=0.004999999
Node(id=2, x=0.0666666701, y=0.00499999
Node(id=6, x=0.0666666701, y=-0.0283333
Node(id=5, x=0.100000001, y=-0.02833333
Integration point number 0.
detJ: 2.7777776463888844E-4

Jacobian matrix:
[[-0.016666665450000003, 0.0]
[0.0, -0.016666667095]]

Inverted jacobian matrix:
[[-60.000004380000306, -0.0]
[-0.0, -59.99999845800003]]

H matrix:
[[3.0374164144318883, -1.32580714158389
[-1.325807141583898, 1.543210024021406,
[-0.38580246913580457, 0.16839958669829
[-1.325806803712186, -0.385802469135804

C matrix:
[[290.1508029445388, 36.853984085246495
[36.853984085246495, 4.681069737433123,
[4.681069737433123, 0.5945738142184811,
[36.853984085246495, 4.681069737433123,
```

2. Test aplikacji importującej siatkę z pliku Test1_4_4.txt:

```
/home/wigryz/.jdks/openjdk-16.0.1/bin/ja
Temperature after 0 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 100.00000

Temperature after 50 seconds:
Min temp: 110.03797 Max temp: 365.81547

Temperature after 100 seconds:
Min temp: 168.83701 Max temp: 502.59171

Temperature after 150 seconds:
Min temp: 242.80085 Max temp: 587.37267

Temperature after 200 seconds:
Min temp: 318.61459 Max temp: 649.38748

Temperature after 250 seconds:
Min temp: 391.25579 Max temp: 700.06842

Temperature after 300 seconds:
Min temp: 459.03691 Max temp: 744.06334

Temperature after 350 seconds:
Min temp: 521.58629 Max temp: 783.38285

Temperature after 400 seconds:
Min temp: 579.03446 Max temp: 818.99218

Temperature after 450 seconds:
Min temp: 631.68926 Max temp: 851.43104

Temperature after 500 seconds:
Min temp: 679.90762 Max temp: 881.05763
```

Wyniki dla porównania:
4x4:

110.03797659406167	365.8154705784631
168.83701715655656	502.5917120896439
242.80085524391868	587.372666691486
318.61459376004086	649.3874834542602
391.2557916738893	700.0684204214381
459.03690325635404	744.0633443187048
521.5862742337766	783.382849723737
579.0344449687701	818.9921876836681
631.6892368621455	851.4310425916341
679.9075931513394	881.057634906017

3. Test aplikacji importującej siatkę z pliku Test2_4_4_MixGrid.txt:

```
/home/wigryz/.jdks/openjdk-16.0.1/bin/ja
Temperature after 0 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 100.00000

Temperature after 50 seconds:
Min temp: 95.15905 Max temp: 374.66834

Temperature after 100 seconds:
Min temp: 147.65587 Max temp: 505.95431

Temperature after 150 seconds:
Min temp: 220.17808 Max temp: 586.98945

Temperature after 200 seconds:
Min temp: 296.75083 Max temp: 647.28013

Temperature after 250 seconds:
Min temp: 370.98260 Max temp: 697.32988

Temperature after 300 seconds:
Min temp: 440.57397 Max temp: 741.21566

Temperature after 350 seconds:
Min temp: 504.90433 Max temp: 781.24077

Temperature after 400 seconds:
Min temp: 564.01388 Max temp: 817.42043

Temperature after 450 seconds:
Min temp: 618.18546 Max temp: 850.26404

Temperature after 500 seconds:
Min temp: 667.77640 Max temp: 880.19223
```

Wyniki dla porównania:
4x4 mix:

95.15184673458245	374.6863325385064
147.64441665454345	505.96811082245307
220.1644549730314	586.9978503916302
296.7364399006366	647.28558387732
370.968275802604	697.3339863103786
440.5601440058566	741.2191121514377
504.8911996551285	781.209569726045
564.0015111915015	817.3915065469778
618.1738556427995	850.2373194670416
667.7655470268747	880.1676054000437

4. Test aplikacji importującej siatkę z pliku Test3_31_31_kwadrat.txt:

```
/home/wigryz/.jdks/openjdk-16.0.1/bin/ja
Temperature after 0 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 100.00000

Temperature after 1 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 149.55695

Temperature after 2 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 177.44493

Temperature after 3 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 197.26696

Temperature after 4 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 213.15279

Temperature after 5 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 226.68258

Temperature after 6 seconds:
Min temp: 100.00001 Max temp: 238.60706

Temperature after 7 seconds:
Min temp: 100.00002 Max temp: 249.34669

Temperature after 8 seconds:
Min temp: 100.00006 Max temp: 259.16508

Temperature after 9 seconds:
Min temp: 100.00016 Max temp: 268.24069

Temperature after 10 seconds:
Min temp: 100.00037 Max temp: 276.70110

Temperature after 11 seconds:
Min temp: 100.00079 Max temp: 284.64128
```

Wyniki dla porównania:
31x31:

99.99969812978378	149.5566275788947
100.00053467957446	177.44482649738018
100.00084733335379	197.2672291500534
100.00116712763896	213.15348263983788
100.00150209858216	226.6837398631218
100.001852708951	238.60869878203812
100.00222410506852	249.34880985057373
100.00263047992797	259.1676797521773
100.00310216686808	268.24376548847937
100.00369558647527	276.70463950306436
100.00450560745507	284.64527660833346

5. Test aplikacji importującej siatkę z pliku Test4_31_31_trapez.txt:

```
/home/wigryz/.jdks/openjdk-16.0.1/bin/java
Temperature after 0 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 100.00000

Temperature after 1 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 166.93574

Temperature after 2 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 207.23332

Temperature after 3 seconds:
Min temp: 100.00000 Max temp: 236.28723

Temperature after 4 seconds:
Min temp: 100.00001 Max temp: 259.46529

Temperature after 5 seconds:
Min temp: 100.00006 Max temp: 279.03123

Temperature after 6 seconds:
Min temp: 100.00018 Max temp: 296.12060

Temperature after 7 seconds:
Min temp: 100.00051 Max temp: 311.38475

Temperature after 8 seconds:
Min temp: 100.00124 Max temp: 325.23527

Temperature after 9 seconds:
Min temp: 100.00272 Max temp: 337.95103

Temperature after 10 seconds:
Min temp: 100.00548 Max temp: 349.73100
```

Wyniki dla porównania:
31x31 trapez:

99.99911415177323	166.9362149651147
99.99873673857435	207.23241215252318
99.99913622824398	236.28484836489392
99.99886349097673	259.4615454293437
99.99856368769406	279.02621207925847
99.99833307076041	296.11440465672047
99.99828777060439	311.37745804357013
99.9986389011151	325.22693428231423
99.999733155009	337.94169376607823
100.00209185746898	349.72071897716853