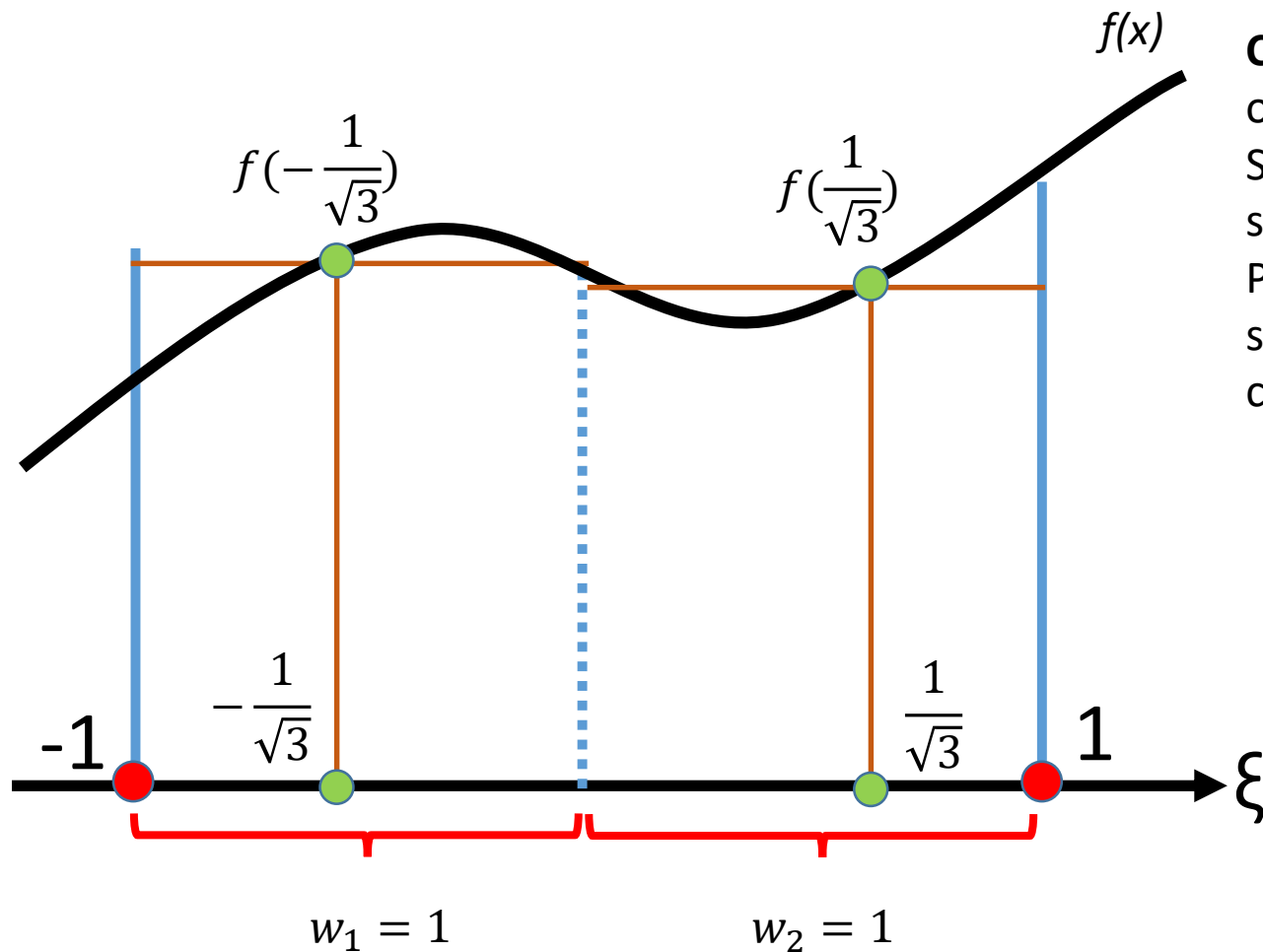


Całkowanie numeryczne metodą prostokątów oraz metodą Gaussa

dr inż. Kustra Piotr
WIMiP, KISiM, AGH
B5, pokój 710



Całkowanie metodą Gaussa

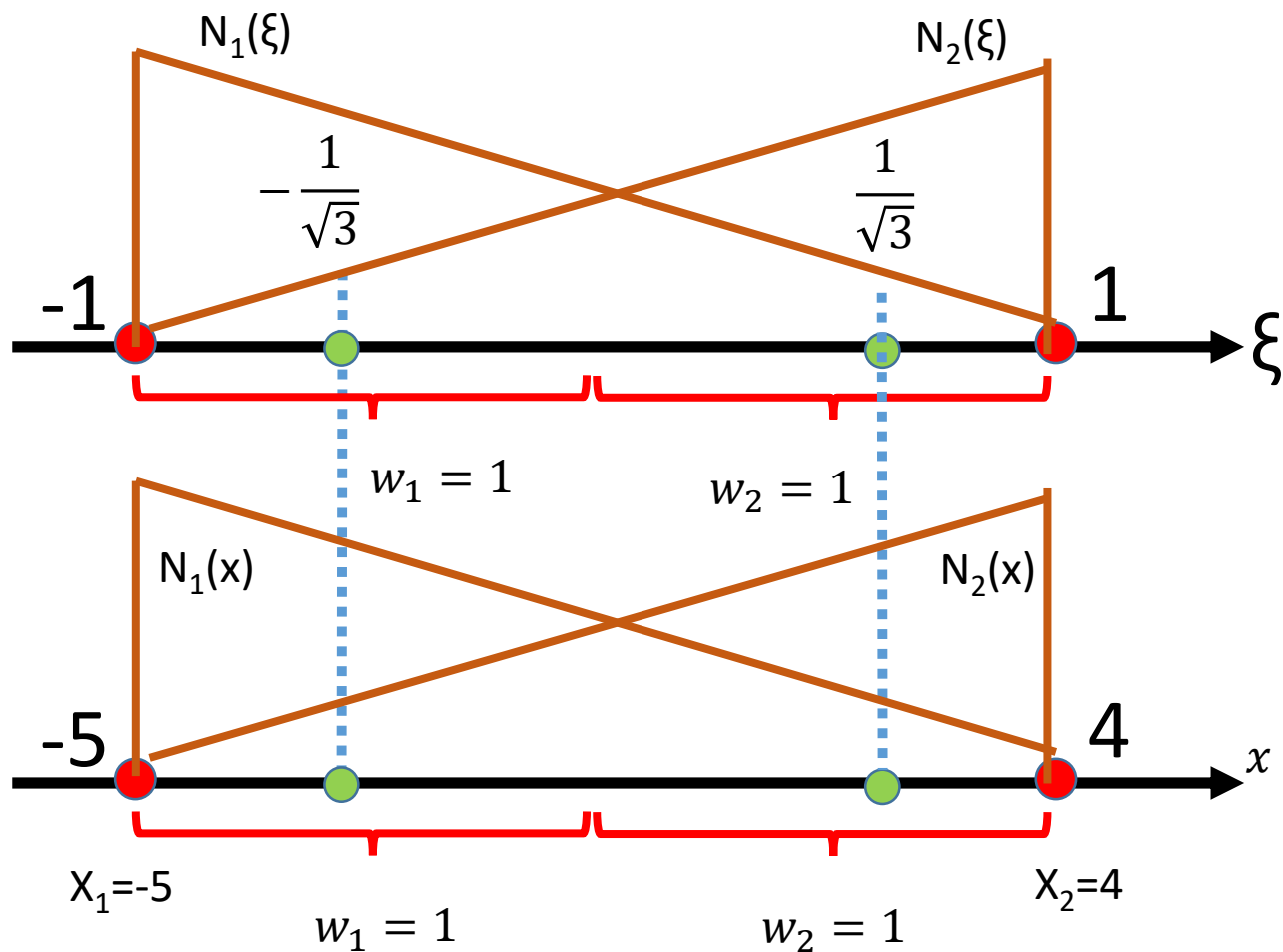
odbywa się w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$

Schematy całkowania zostały opracowane oraz stabelaryzowane. Nazywane są one kwadraturami Gaussa. Przedstawiono przykład dla $n=1$ czyli dwupunktowego schematu całkowania. x_k oznaczono współrzędną punktu całkowania a A_k wagę punktu całkowania.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla $N=1, 2, 3, 4$

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3}/5$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1; 2	∓ 0.339981	0.652145
4	0; 4	∓ 0.906180	0.236927
	1; 3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2)$$



Całkowanie metodą Gaussa

Jeżeli całkowanie realizowane jest w innym przedziale niż $\langle -1; 1 \rangle$ punkty całkowania znajdują się w innych miejscach. Ich lokalizację należy obliczyć. Funkcje kształtu w układzie lokalnym mają postać:

$$N_1(\xi) = 0.5 \cdot (1 - \xi)$$

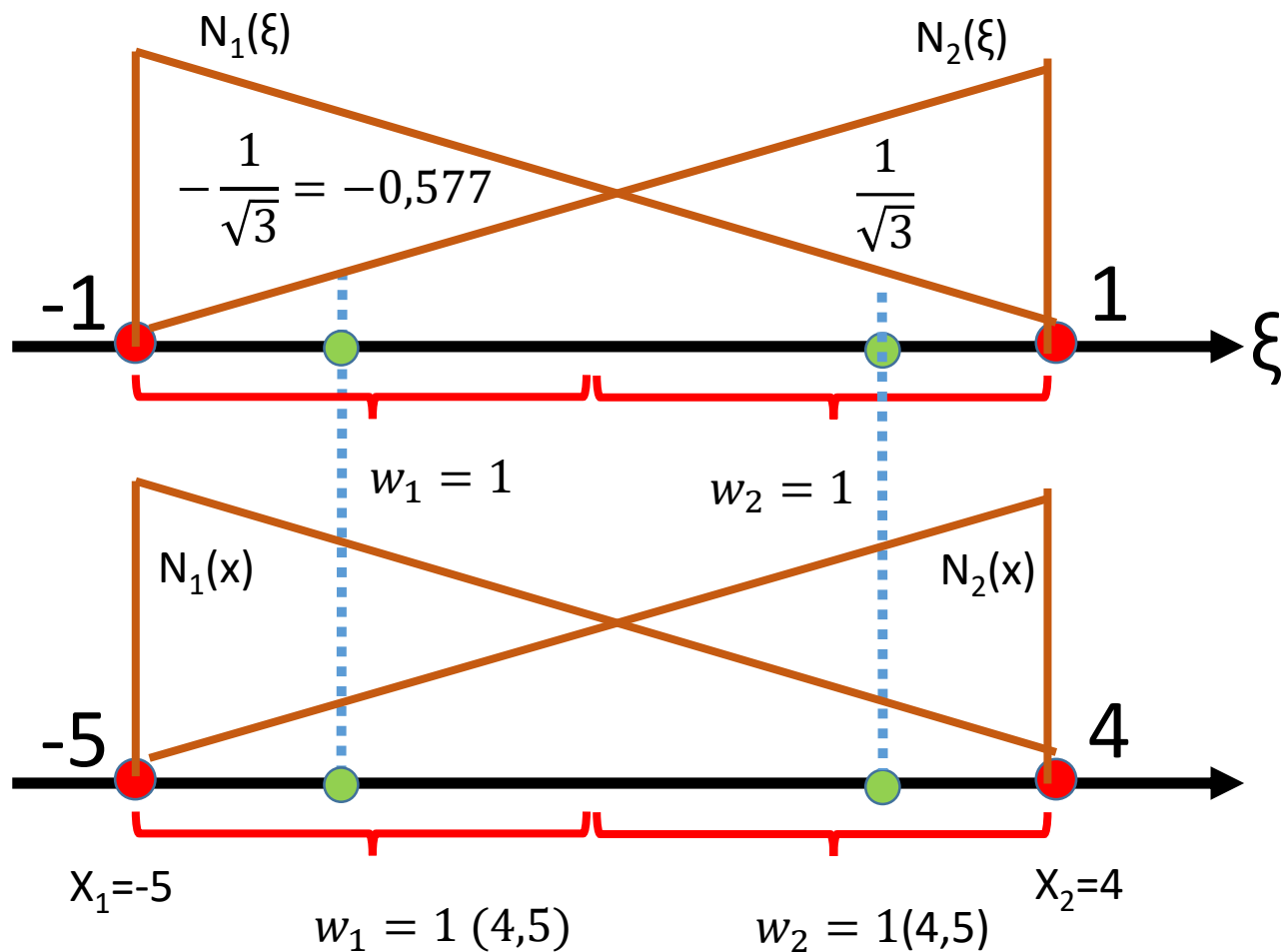
$$N_2(\xi) = 0.5 \cdot (1 + \xi)$$

$$N_1(x) = (x_2 - x) / (x_2 - x_1)$$

$$N_2(x) = (x - x_1) / (x_2 - x_1)$$

Z przedstawionego schematu wynika, iż bez względu na to ile wynosi x_1 oraz x_2 wartość funkcji kształtu w punktach całkowania w układzie lokalnym oraz globalnym jest taka sama.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) w_i)$$



Jak można zauważyć waga w układzie globalnym nie jest równa 1. Wartość ta wynika z geometrii. W układzie lokalnym długość pomiędzy -1 a 1 wynosi 2 dlatego suma wag wynosi 2. W układzie globalnym długość wynosi $x_2 - x_1$ czyli 9. Dlatego waga powinna być równa 4,5.

Obliczanie położenia punktów całkowania Interpolacja x

Ponieważ wartości funkcji $N(x)$ w punktach całkowania mają taką samą wartość jak $N(\xi)$ w punktach całkowania interpolację można przeprowadzić w następujący sposób:

$$x = N_1(\xi) * x_1 + N_2(\xi) * x_2$$

Obliczamy wartości funkcji kształtu w pierwszym punkcie całkowania $\xi = -0,577$:

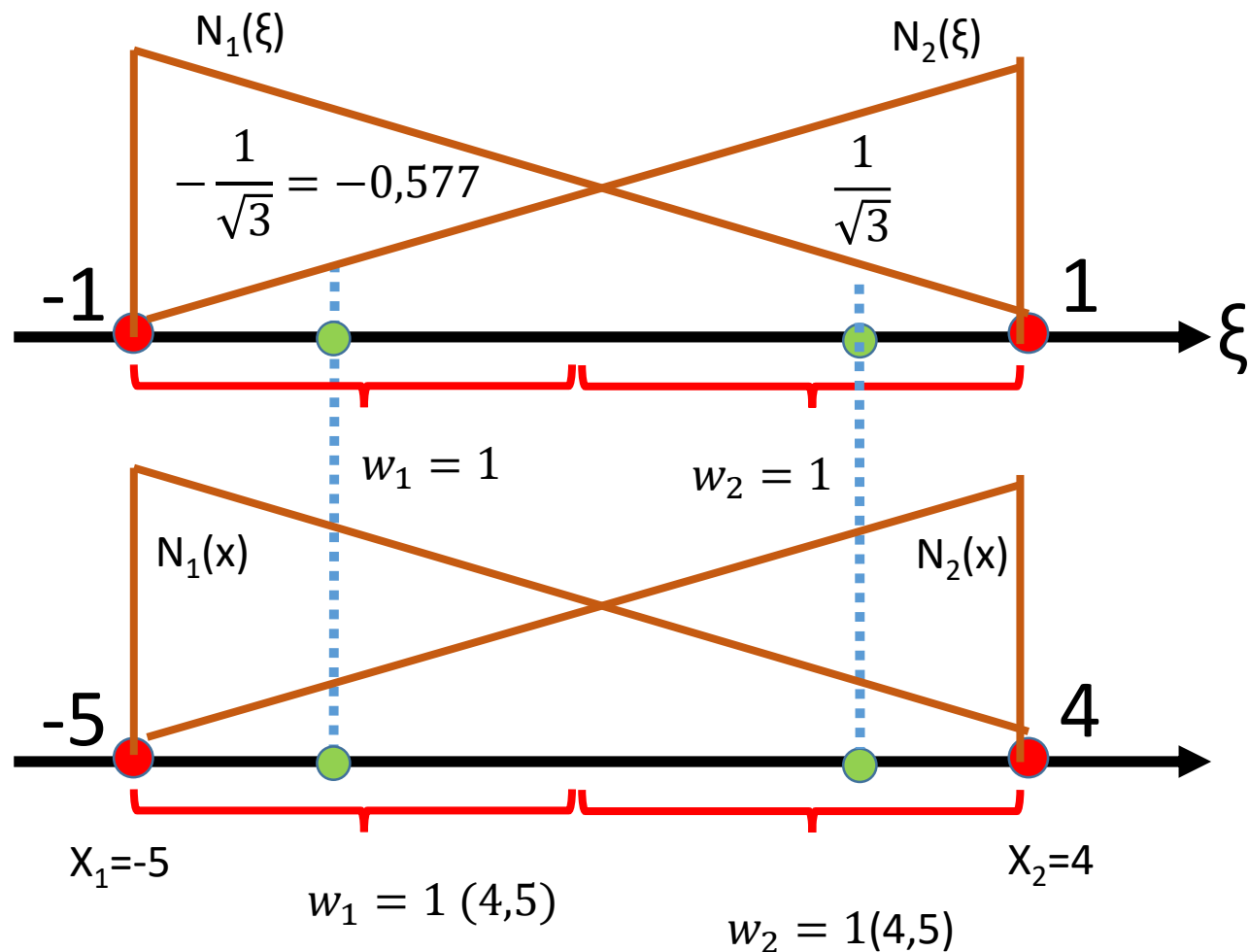
$$N_1(\xi) = 0.5 * (1 - \xi) = 0.5 * (1 - (-0,577)) = 0,788$$

$$N_2(\xi) = 0.5 * (1 + \xi) = 0.5 * (1 + (-0,577)) = 0,212$$

$$x_{pc1} = 0,788 * (-5) + 0,212 * 4 = -3,098$$

$$x_{pc2} = 0,212 * (-5) + 0,788 * 4 = 2,098$$

$$\int_{-5}^4 f(x) dx = w_1 * f(x_{pc1}) + w_2 * f(x_{pc2})$$



Różnica długości wag związana jest z Jakobianem przekształcenia 1D:

<http://home.agh.edu.pl/~pkustra/MES/Jakobian.pdf>

$$x = N_1(\xi) * x_1 + N_2(\xi) * x_2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} * x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} * x_2$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -0,5 \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 0,5$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -0,5 * x_1 + 0,5 * x_2 = \frac{(x_2 - x_1)}{2} = \Delta \xi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{(4 - (-5))}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 = \det[J]$$

$$\int_{-5}^4 f(x) dx = (w_1 * f(x_{pc1}) + w_2 * f(x_{pc2})) * \det[J]$$

$$\int_{-5}^4 f(x) dx = \sum_{i=1}^n (f(x_{pci}) * w_i) * \det[J]$$

Wartość 4,5 mówi o tym jak zmienia się długość układu globalnego względem układu lokalnego. W związku z tym całkowanie realizowane jest w sposób następujący:

Przykład dla dwupunktowego schematu całkowania

$$\int_{-5}^4 0.5x^2 + 2x + 3dx$$

$$f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$$

$$x_{pc1} = 0,788 * (-5) + 0,212 * 4 = -3,098$$

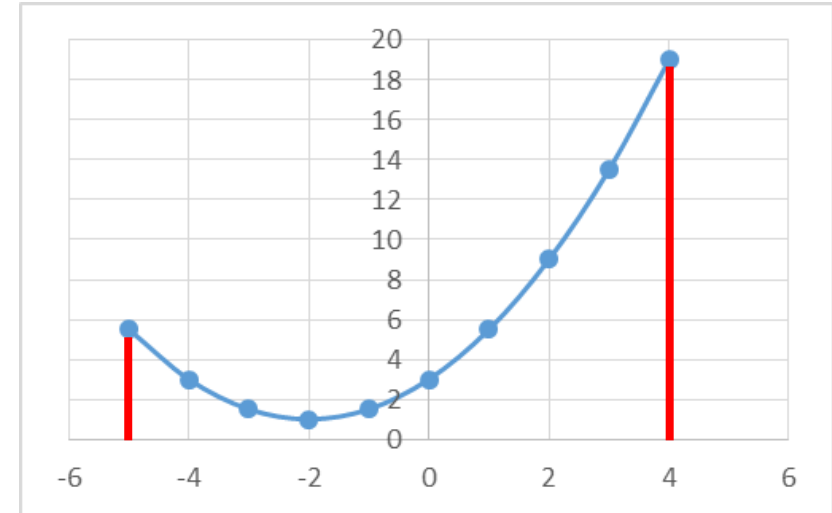
$$x_{pc2} = 0,212 * (-5) + 0,788 * 4 = 2,098$$

$$f(x_{pc1}) = 0.5(-3,098)^2 + 2(-3,098) + 3 = 1,60288$$

$$f(x_{pc2}) = 0.5(2,098)^2 + 2(2,098) + 3 = 9,398$$

$$\int_{-5}^4 f(x)dx = (w_1 * f(x_{pc1}) + w_2 * f(x_{pc2})) * \det[J]$$

$$\int_{-5}^4 f(x)dx = (1 * 1,60288 + 1 * 9,398) * 4,5 = 49,5$$



Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp \sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1; 2	∓ 0.339981	0.652145
4	0; 4	∓ 0.906180	0.236927
	1; 3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889

Przykład dla trójpunktowego schematu całkowania

$$\int_{-5}^4 0.5x^2 + 2x + 3dx$$

$$f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$$

$$x_{pc1} = 0,88729 * (-5) + 0,112702 * 4 = -3,9856$$

$$x_{pc2} = -0,5 \quad x_{pc3} = -2,9856$$

$$f(x_{pc1}) = 0.5(-3,9856)^2 + 2(-3,9856) + 3 = 2,97148$$

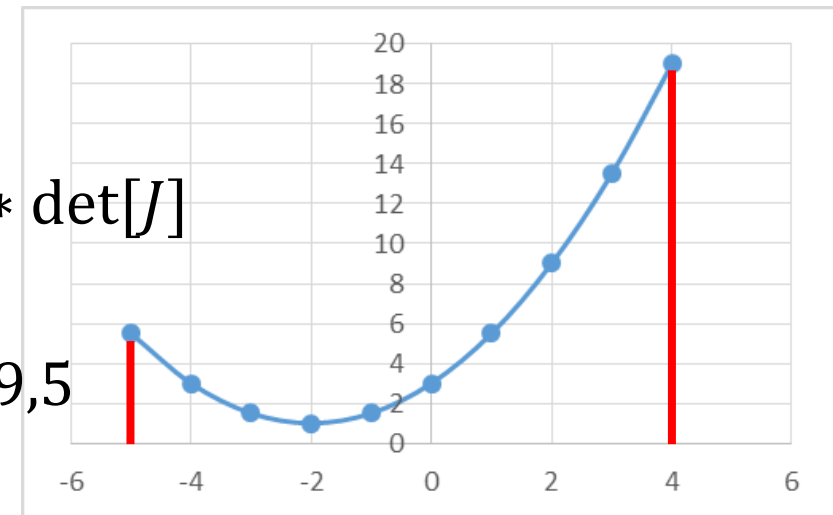
$$f(x_{pc2}) = 2,125 \quad f(x_{pc3}) = 13,428$$

$$\int_{-5}^4 f(x)dx = (w_1 * f(x_{pc1}) + w_2 * f(x_{pc2}) + w_3 * f(x_{pc3})) * \det[J]$$

$$\int_{-5}^4 f(x)dx = \left(\frac{5}{9} * 2,697148 + \frac{8}{9} * 2,125 + \frac{5}{9} * 13,428\right) * 4,5 = 49,5$$

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2 1	$\mp \sqrt{3/5}$ 0	5/9 8/9
3	0; 3 1; 2	+0.861136 ∓ 0.339981	0.347855 0.652145
4	0; 4 1; 3 2	∓ 0.906180 ∓ 0.538469 0	0.236927 0.478629 0.568889



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$N1 = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N2 = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N3 = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N4 = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\frac{dN1}{d\xi} = -0.25(1 - \eta)$$

$$\frac{dN2}{d\xi} = 0.25(1 - \eta)$$

$$\frac{dN3}{d\xi} = 0.25(1 + \eta)$$

$$\frac{dN4}{d\xi} = -0.25(1 + \eta)$$

$$\frac{dN1}{d\eta} = -0.25(1 - \xi)$$

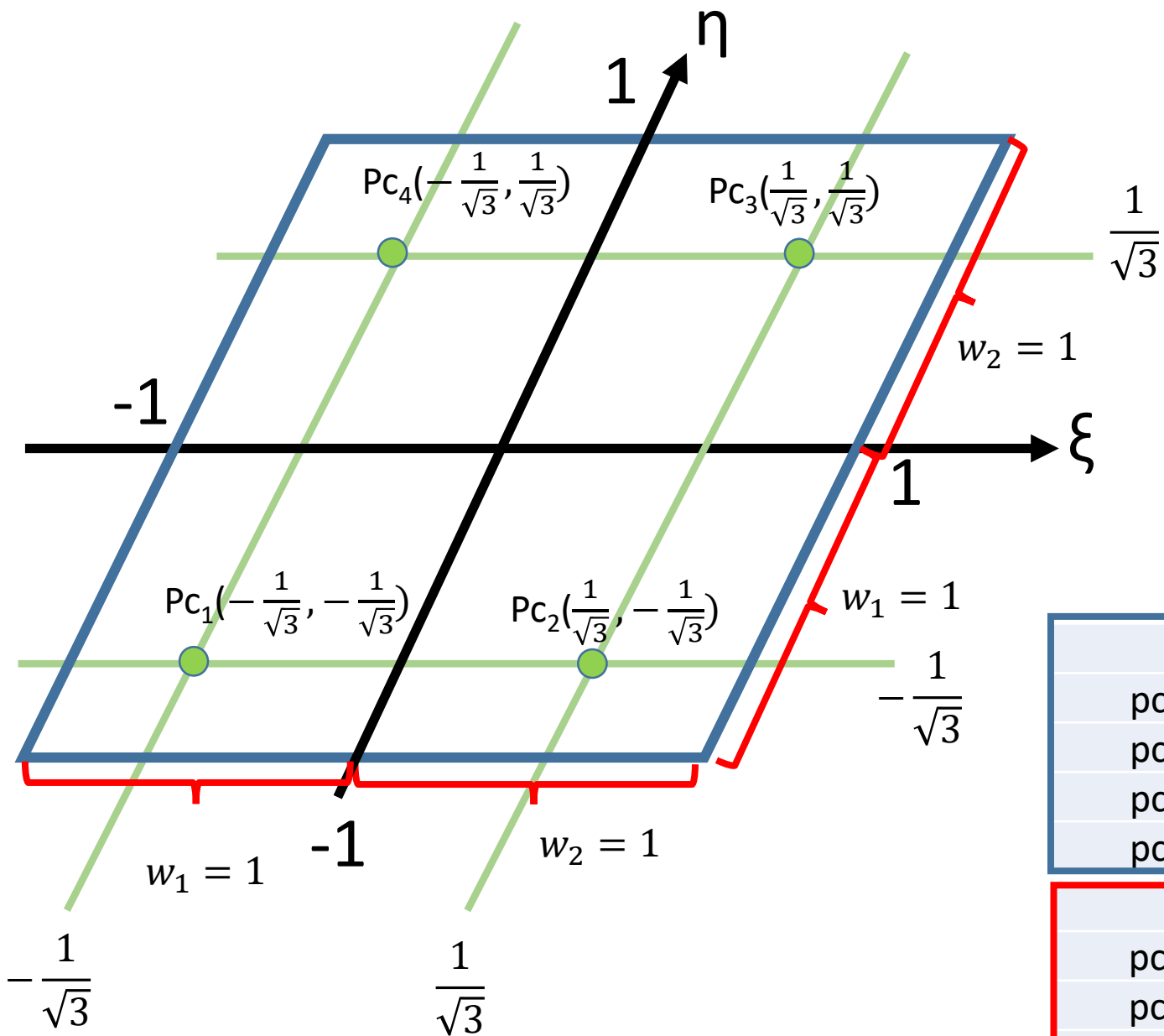
$$\frac{dN2}{d\eta} = -0.25(1 + \xi)$$

$$\frac{dN3}{d\eta} = 0.25(1 + \xi)$$

$$\frac{dN4}{d\eta} = 0.25(1 - \xi)$$

$$x = \sum_{i=1}^{np} (N_i x_i) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \{N\}^T \{x\}$$

$$y = \sum_{i=1}^{np} (N_i y_i) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \{N\}^T \{y\}$$



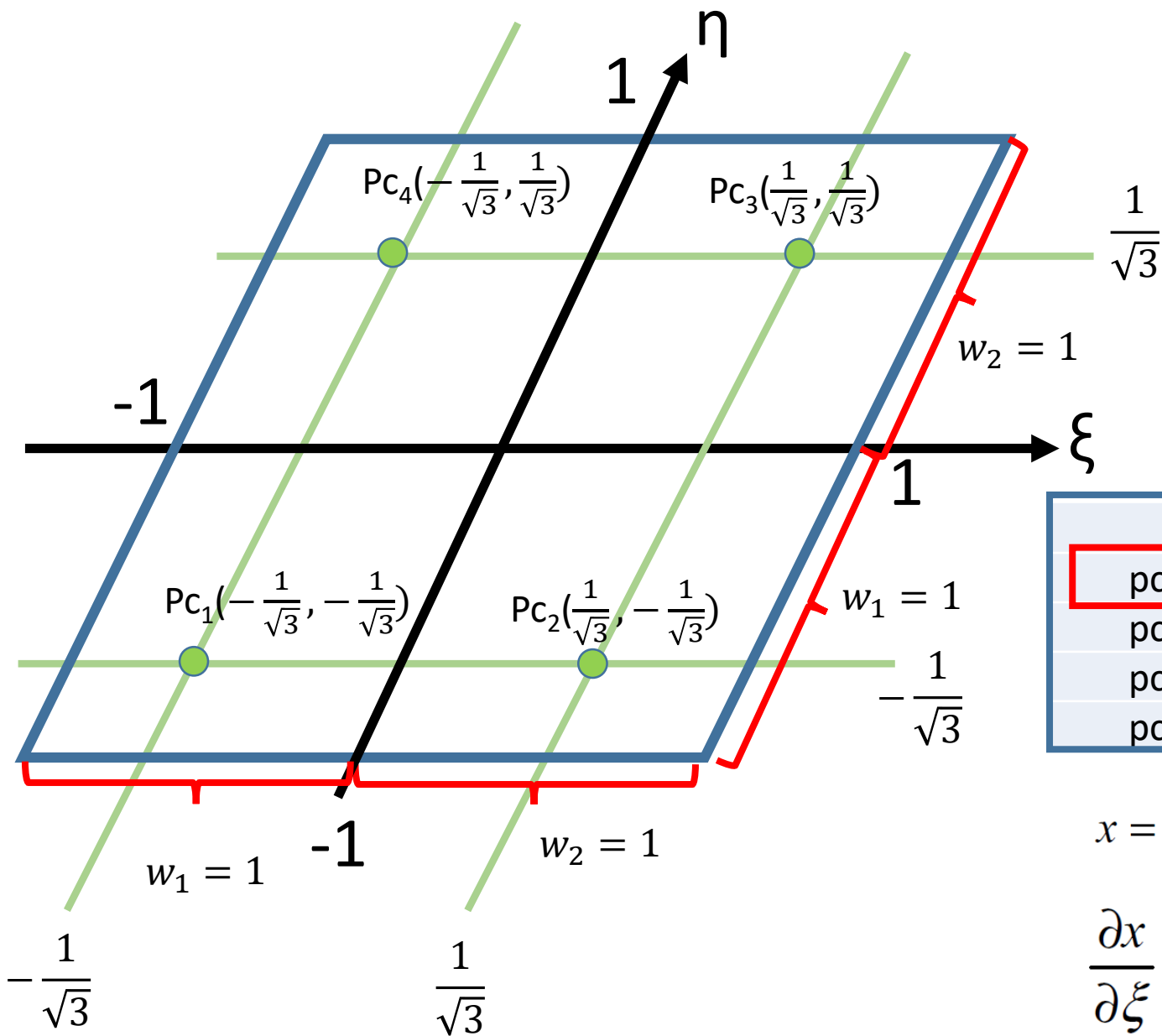
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$x = \sum_{i=1}^{np} (N_i x_i) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4$$

	dN1/dξ	dN2/dξ	dN3/dξ	dN4/dξ
pc1	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc2	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc3	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434
pc4	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434

	dN1/dη	dN2/dη	dN3/dη	dN4/dη
pc1	-0,39434	-0,10566	0,105662	0,394338
pc2	-0,10566	-0,39434	0,394338	0,105662
pc3	-0,10566	-0,39434	0,394338	0,105662
pc4	-0,39434	-0,10566	0,105662	0,394338



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

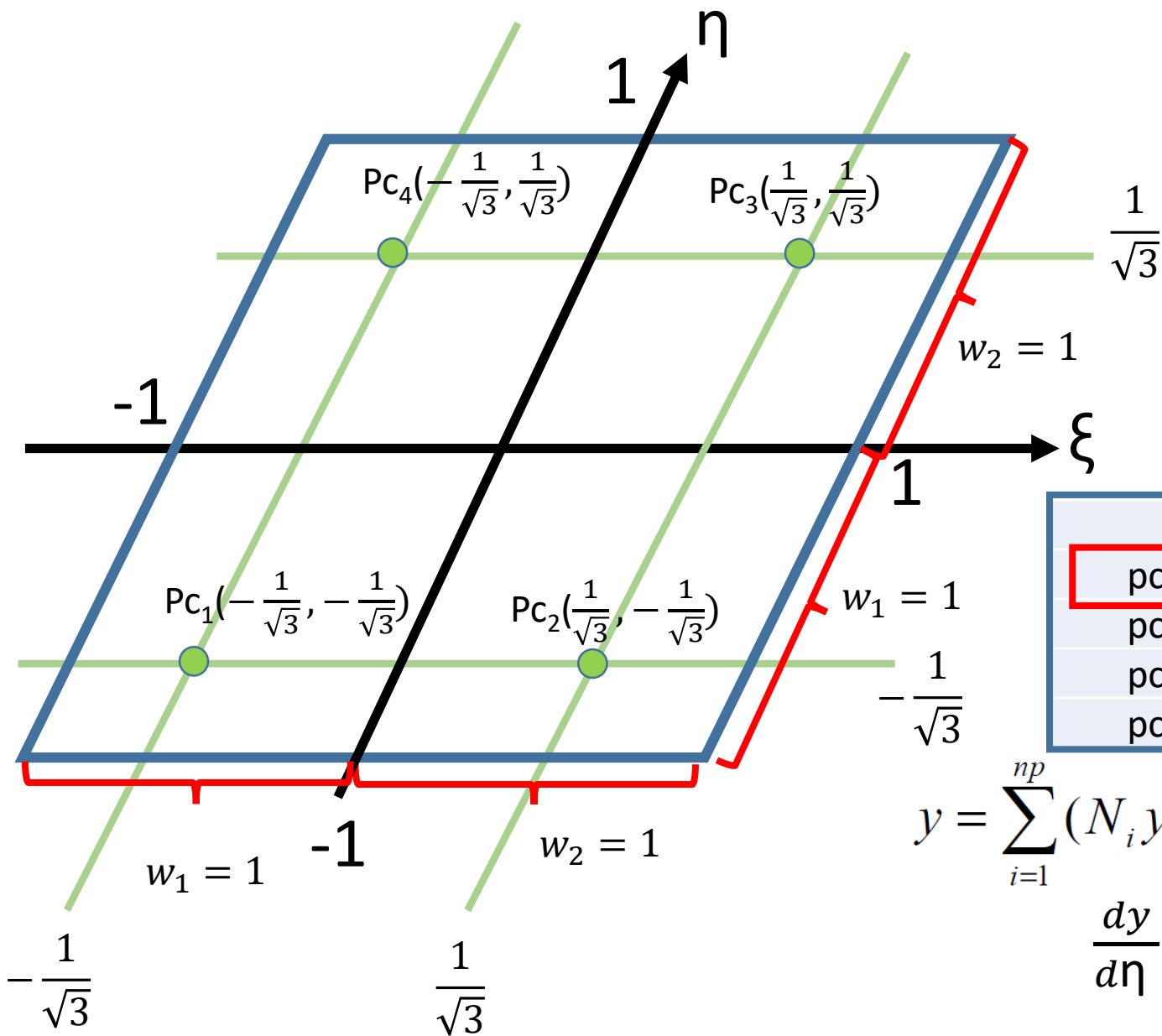
ID	1	2	3	4
x	0	0,025	0,025	0
y	0	0	0,025	0,025

	dN1/dξ	dN2/dξ	dN3/dξ	dN4/dξ
pc1	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc2	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc3	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434
pc4	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434

$$x = \sum_{i=1}^{np} (N_i x_i) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4$$

$$\frac{dx}{d\xi} = -0,39439 * 0,0 + 0,39439 * 0,025 + 0,105662 * 0,025 + (-0,105662) * 0,0 = 0,0125$$



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

ID	1	2	3	4
x	0	0,025	0,025	0
y	0	0	0,025	0,025

	dN1/dn	dN2/dn	dN3/dn	dN4/dn
pc1	-0,39434	-0,10566	0,105662	0,394338
pc2	-0,10566	-0,39434	0,394338	0,105662
pc3	-0,10566	-0,39434	0,394338	0,105662
pc4	-0,39434	-0,10566	0,105662	0,394338

$$y = \sum_{i=1}^{np} (N_i y_i) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \{N\}^T \{y\}$$

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} y_1 + \frac{dN_2}{d\eta} y_2 + \frac{dN_3}{d\eta} y_3 + \frac{dN_4}{d\eta} y_4$$

$$\frac{dy}{d\eta} = -0,39439 * 0,0 + (-0,105662)*0,0 + 0,105662*0,025 + 0,39439 * 0,025 = 0,0125$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = 6400 \begin{bmatrix} 0,0125 & 0 \\ 0 & 0,0125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN1}{d\xi} &= -0.25(1 - \eta) \\ \frac{dN2}{d\xi} &= 0.25(1 - \eta) \\ \frac{dN3}{d\xi} &= 0.25(1 + \eta) \\ \frac{dN4}{d\xi} &= -0.25(1 + \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN1}{d\eta} &= -0.25(1 - \xi) \\ \frac{dN2}{d\eta} &= -0.25(1 + \xi) \\ \frac{dN3}{d\eta} &= 0.25(1 + \xi) \\ \frac{dN4}{d\eta} &= 0.25(1 - \xi) \end{aligned}$$

Dla pc1

$$\begin{bmatrix} 0,0125 & 0 \\ 0 & 0,0125 \end{bmatrix}$$

$$\det[j] = 0,00015625$$

$$1/\det[j] = 6400$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$