6. SYMULACJA NIEUSTALONYCH PROCESÓW CIEPLNYCH

6.1. ZASADY OGÓLNE

Równanie Fouriera dla procesu niestacjonarnego (nieustalonego) ma postać:

$$div(k(t)grad(t)) + Q = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau},$$

albo w przypadku anizotropowych własności cieplnych:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \left(Q - c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = 0. \qquad (6.1)$$

W określonej chwili czasu pochodne temperatury mogą być traktowane jako funkcje tylko współrzędnych *x,y,z*. Wtedy rozwiązanie równania (6.1) jest prowadzone analogicznie jak dla procesu ustalonego, przyjmując całe wyrażenie w ostatnim nawiasie (6.1) jako parametr Q w funkcjonale (5.9). W wyniku wykorzystania procedur, opisanych w rozdziale 5.1 otrzymamy:

$$[H]\{t\} + [C]\frac{\partial}{\partial \tau}\{t\} + \{P\} = 0, \qquad (6.2)$$

$$[C] = \int_V c\rho\{N\}\{N\}^T dV. \qquad (6.3)$$

W ogólnym przypadku wartości temperatury w węzłach $\{t\}$ zależą od czasu. Przyjmując, że wektor $\{t_0\}$ reprezentuje temperatury węzłowe w chwili $\tau = 0$, to w przedziale czasu $\Delta\tau$ wektor ten będzie wyznaczony równaniem:

$$\{t\} = \{N_0, N_1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}. \qquad (6.4)$$

W równaniu (6.4) $\{N_0\}$ i $\{N_1\}$ są funkcjami kształtu zależnymi od czasu, $\{t_1\}$ –temperatury węzłowe po czasie $\Delta\tau$.

Zakładając, że dla małych kroków czasowych $\Delta\tau$ zależność temperatur węzłowych od czasu jest liniowa, funkcje kształtu przyjmą postać:

$$N_0 = \frac{\Delta\tau - \tau}{\Delta\tau}, \; N_1 = \frac{\tau}{\Delta\tau}. \qquad (6.5)$$

Uwzględniając zależność (6.4), pochodne temperatury względem czasu można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau} &= \left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau}, \frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta\tau}\{-1,1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix} = \frac{\{t_1\} - \{t_0\}}{\Delta\tau}.\end{aligned} \qquad (6.6)$$

Ponieważ podczas interpolacji czasowej wykorzystano liniowe funkcji kształtu, rezultat (6.6) jest zbieżny z wynikiem, który można uzyskać za pomocą metody różnic skończonych. Istnieje kilka możliwości rozwiązania układu równań (6.2) za pomocą interpolacji (6.6) zależnie od tego, w jakiej chwile czasu będziemy rozpatrywać wektor $\{t\}$ we wzorze (6.2) przy macierze $[H]$.

1. Przyjęto, że $\{t\}=\{t_0\}$, dlatego wzór (6.2) można zapisać jako:

$$[H]\{t_0\}+[C]\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}+\{P\}=0\ .$$

Na tej podstawie otrzymano jawny schemat wyznaczenia temperatury $\{t_1\}$ w przedziale czasu $\Delta\tau$:

$$\{t_1\}=\{t_0\}-\frac{\Delta\tau}{[C]}\left([H]\{t_0\}+\{P\}\right). \qquad (6.7)$$

Jednak taki schemat ma ograniczone zastosowanie, ze względu na słabą stabilność rozwiązania dla różnych $\Delta\tau$.

2. Przyjęto, że $\{t\}=\{t_1\}$, dlatego wzór (6.2) można zapisać następująco:

$$[H]\{t_1\}+[C]\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}+\{P\}=0\ .$$

W ten sposób otrzymano niejawny schemat wyznaczenia temperatury $\{t_1\}$:

$$\left([H]+\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}-\left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}=0\ . \qquad (6.8)$$

W takim przypadku wyznaczenie $\{t_1\}$ wymaga rozwiązania układu równań (6.8).

Zgodnie z otrzymanymi wzorami można zapisać macierz $[C]$:

9.1 SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W ostatnim rozdziale niniejszego opracowania przedstawiono przykład oprogramowania, które stanowi rozwiązanie zagadnienia nieustalonej wymiany ciepła w układzie dwuwymiarowym. Podstawy teoretyczne tego rozwiązania są podane w rozdziałach 5 i 6. Układ równań MES uzyskano za pomocą wzoru (6.8):

$$\left([H]+\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}-\left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}=0\,, \tag{6.8}$$

gdzie poszczególne wyrażenia obliczono za pomocą równań (5.14), (5.15) i (6.3):

$$\begin{aligned}[H]=&\int_V k\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right)dV+\\ &+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS,\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\{P\}=-\int_S \alpha\{N\}t_\infty dS\,, \tag{6.10}$$

$$[C]=\int_V c\rho\{N\}\{N\}^T dV\,. \tag{6.11}$$

We wzorze (6.8) $\{t_1\}$ oznacza wartości temperatur węzłowych po czasie $\Delta\tau$, natomiast wektor $\{t_0\}$ reprezentuje temperatury węzłowe w chwili $\tau=0$.

Ponieważ analogiczną postać mają równania dla zadań dyfuzji, dlatego opracowany program po zmianie współczynników można wykorzystać do modelowania procesów dyfuzji. Wyzerowanie macierzy $[C]$ spowoduje rozwiązanie ustalonego zadania cieplnego albo innego zadania opartego na równaniu Poissona (3.65).