

## 5. SYMULACJA USTALONYCH PROCESÓW CIEPLNYCH

### 5.1. ZASADY OGÓLNE

Zjawiska cieplne zachodzące w stanie ustalonym opisuje równanie Fouriera w postaci:

$$\operatorname{div}(k(t)\operatorname{grad}(t)) + Q = 0,$$

które może być zapisane też w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right) + Q = 0, \quad (5.1)$$

gdzie:

$k_x(t)$ ,  $k_y(t)$ ,  $k_z(t)$  – anizotropowe współczynniki przewodzenia ciepła zależne od temperatury  $t$ ;  
 $Q$  – prędkość generowania ciepła.

Rozwiązanie równania (5.1) sprowadza się do zadania polegającego na poszukiwaniu minimum takiego funkcjonału, dla którego równanie (5.1) jest równaniem Eulera. Według rachunku wariacyjnego [5, 14, 17] funkcjonał taki będzie miał postać:

$$J = \int_V \frac{1}{2} \left( k_x(t) \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + k_y(t) \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + k_z(t) \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 - 2Qt \right) dV. \quad (5.2)$$

Przy założeniu, że  $k_x(t) = k_y(t) = k_z(t) = k(t)$  dla materiałów izotropowych funkcjonał wyraża się jako:

$$J = \int_V \left( \frac{k(t)}{2} \left( \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right) - Qt \right) dV. \quad (5.3)$$

Funkcja  $t(x,y,z)$  musi spełniać określone warunki brzegowe na powierzchni rozpatrywanego obszaru. Możliwe są trzy typy warunków brzegowych:

- na powierzchni jest zadana temperatura  $t$ ;
- na powierzchni zadany jest strumień ciepła  $q$  według prawa konwekcji:

$$k(t) \left( \frac{\partial t}{\partial x} a_x + \frac{\partial t}{\partial y} a_y + \frac{\partial t}{\partial z} a_z \right) = \alpha_{konw} (t - t_\infty), \quad (5.4)$$

gdzie:

$a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  – kosinusy kierunkowe wektora normalnego do powierzchni;

$t_\infty$  – temperatura otoczenia;

$\alpha_{konw}$  – współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła;

- na powierzchni metalu zadany jest strumień cieplny  $q$  według prawa wymiany przez promieniowanie:

$$k(t) \left( \frac{\partial t}{\partial x} a_x + \frac{\partial t}{\partial y} a_y + \frac{\partial t}{\partial z} a_z \right) = \sigma_{rad} (t^4 - t_\infty^4), \quad (5.5)$$

gdzie:

$\sigma_{rad}$  – współczynnik wymiany ciepła przez promieniowanie.

Przy wspólnym działaniu dwóch ostatnich warunków może być użyte prawo konwekcji:

$$k(t) \left( \frac{\partial t}{\partial x} a_x + \frac{\partial t}{\partial y} a_y + \frac{\partial t}{\partial z} a_z \right) = \alpha (t - t_\infty) \quad (5.6)$$

gdzie:

$\alpha$  – efektywny współczynnik wymiany ciepła, który można wyznaczyć według iteracyjnej formuły:

$$\alpha = \alpha_{konw} + \sigma_{rad} (t^2 + t_\infty^2) (t + t_\infty). \quad (5.7)$$

Wyrażenie  $\alpha(t_\infty - t)$  dotyczy wymiany ciepła z otoczeniem, a współczynnik  $\alpha$  jest przyjmowany odpowiednio do istniejących warunków. Możliwa jest wymiana ciepła z gazem, powietrzem lub medium chłodzącym na powierzchniach swobodnych.

Bezpośrednie wprowadzenie warunków brzegowych do funkcjonału (5.3) nie jest możliwe. W praktyce narzuca się te warunki poprzez dodanie do funkcjonału (5.3) całki w postaci:

$$\int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS + \int_S q t dS, \quad (5.8)$$

gdzie:

$S$  – powierzchnia, na której zadane są warunki brzegowe.

W rezultacie otrzymuje się:

$$J = \int_V \left( \frac{k(t)}{2} \left( \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right) - Q t \right) dV + \int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS + \int_S q t dS. \quad (5.9)$$

Dyskretyzacja przedstawionego problemu polega na podzieleniu rozpatrywanego obszaru na elementy i przedstawieniu temperatury wewnątrz elementu, jako funkcji wartości węzłowych zgodnie z zależnością:

$$t = \sum_{i=1}^n N_i t_i = \{N\}^T \{t\}. \quad (5.10)$$

Wprowadzając zależność (5.10) do funkcjonału (5.9) otrzymano:

$$J = \int_V \left( \frac{k}{2} \left( \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T \{t\} \right)^2 + \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \{t\} \right)^2 + \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\}^T \{t\} \right)^2 \right) - Q \{N\}^T \{t\} \right) dV + \int_S \frac{\alpha}{2} (\{N\}^T \{t\} - t_\infty)^2 dS + \int_S q \{N\}^T \{t\} dS. \quad (5.11)$$

Minimalizacja funkcjonału (5.11) sprowadza się do obliczenia pochodnych cząstkowych tego funkcjonału względem wartości węzłowych temperatury  $\{t\}$ , co w rezultacie prowadzi do następującego układu równań:

$$\frac{\partial J}{\partial \{t\}} = \int_V k \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\}^T \right) \{t\} - Q\{N\} dV +$$

$$+ \int_S \alpha \{N\}^T \{t\} - t_\infty \{N\} dS + \int_S q\{N\} dS = 0 \quad (5.12)$$

Układ równań (5.12) zapisany w postaci macierzowej ma postać:

$$[H]\{t\} + \{P\} = 0. \quad (5.13)$$

W równaniu (5.13) macierze  $[H]$  i  $\{P\}$  opisane są następującymi zależnościami:

$$[H] = \int_V k(t) \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\}^T \right) dV +$$

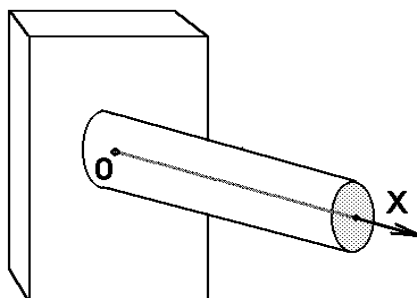
$$+ \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS, \quad (5.14)$$

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_\infty dS - \int_V Q\{N\} dV + \int_S q\{N\} dS \quad (5.15)$$

W inny sposób minimalizacja funkcjonału (5.11) może być wykonana przez bezpośredni dobór węzłowych wartości temperatury za pomocą jednej z istniejących metod minimalizacji.

## 5.2. WYZNACZANIE USTALONEGO POLA TEMPERATURY W PRĘCIE

Rozpatrzmy proces ustalonego przewodnictwa ciepła w pręcie. Przypuśćmy, że wymiana ciepła będzie odbywała się tylko przez dwa końce tego pręta (rys. 5.1). Do zamocowanego końca pręta jest doprowadzony strumień ciepła  $q$ . Na wolnym końcu pręta zachodzi wymiana ciepła przez konwekcję. Współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła jest równy  $\alpha$ , natomiast temperatura otoczenia jest równa  $t_\infty$ .



**Rys. 5.1.** Schemat do zadania wyznaczenia pola temperatury w pręcie

Długość pręta równa jest  $L$ . Rozpatrzmy równanie różniczkowe Fouriera dla przypadku jednowymiarowego:

$$k \frac{d^2 t}{dx^2} = 0, \quad (5.16)$$

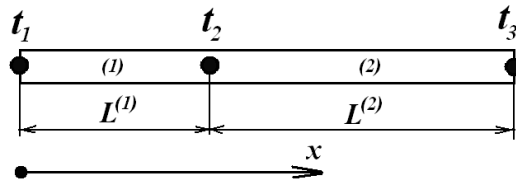
przy warunkach brzegowych:

$$k \frac{dt}{dx} + q = 0, \quad \text{gd}y \quad x=0; \quad (5.17)$$

$$k \frac{dt}{dx} + \alpha(t - t_{\infty}) = 0, \quad \text{gd}y \quad x=L. \quad (5.18)$$

Jednostkowy strumień ciepła  $q$  jest dodatni, jeżeli ciepło jest odprowadzane z pręta. Funkcjonał (5.9) dla rozpatrywanego przypadku można zapisać w sposób następujący:

$$J = \int_V \frac{1}{2} \left( k \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 \right) dV + \int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_{\infty})^2 dS + \int_S tq dS. \quad (5.19)$$



**Rys. 5.2.** Schemat obliczeniowy pręta i jego podział na dwa elementy skończone

Rozpatrzmy proces minimalizacji funkcjonału (5.19). Rozdzielimy pręt na dwa elementy skończone z węzłami 1, 2, 3 (rys. 5.2),  $L^{(1)}$  i  $L^{(2)}$  są długościami elementów. Wówczas węzłowe wartości temperatury  $t_1, t_2, t_3$  są niewiadomymi. Temperatura wewnątrz elementów jest zdefiniowana następująco:

$$t^{(1)} = N_1^{(1)} t_1 + N_2^{(1)} t_2, \quad (5.20)$$

$$t^{(2)} = N_2^{(2)} t_2 + N_3^{(2)} t_3, \quad (5.21)$$

$$N_1^{(1)} = \frac{x_2 - x}{L^{(1)}}, \quad N_2^{(1)} = \frac{x - x_1}{L^{(1)}}, \quad (5.22)$$

$$N_2^{(2)} = \frac{x_3 - x}{L^{(2)}}, \quad N_3^{(2)} = \frac{x - x_2}{L^{(2)}}. \quad (5.23)$$

Rozpatrzono całki funkcjonału (5.19):

$$\int_{S_1} q t dS = q t_1 S_1, \quad (5.24)$$

$$\int_{S_3} \frac{\alpha}{2} (t - t_{\infty})^2 dS = \frac{\alpha S_3}{2} (t_3^2 - 2 t_3 t_{\infty} + t_{\infty}^2), \quad (5.25)$$

gdzie:

$S_1$  i  $S_3$  – przekroje pręta w węzłach 1 i 4.

Obliczono całki objętościowe w funkcjonałe (5.19). W tym celu wyznaczono pochodne temperatury względem  $x$ :

$$\frac{dt^{(1)}}{dx} = \frac{(-t_1 + t_2)}{L^{(1)}}, \quad (5.26)$$

$$\frac{dt^{(2)}}{dx} = \frac{(-t_2 + t_3)}{L^{(2)}} \quad (5.27)$$

Uwzględniając, że  $dV = S^{(e)} dx$  i wykorzystując przekształcenie algebraiczne otrzymano:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{k}{2} \left( \frac{dt}{dX} \right)^2 dV &= \\ &= \frac{k^{(1)} S^{(1)}}{2L^{(1)}} (t_2 - t_1)^2 + \frac{k^{(2)} S^{(2)}}{2L^{(2)}} (t_3 - t_2)^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Współczynnik przewodzenia ciepła  $k$  może być różny dla każdego elementu. Sumujemy wzory (5.24, 5.25 i 5.28) i otrzymujemy funkcjonal (5.19) w postaci funkcji węzłowych wartości temperatury:

$$\begin{aligned} J &= \frac{C^{(1)}}{2} (t_1^2 - 2t_1 t_2 + t_2^2) + \frac{C^{(2)}}{2} (t_2^2 - 2t_2 t_3 + t_3^2) + \\ &+ qS_1 t_1 + \frac{\alpha S_3}{2} (t_3^2 - 2t_3 t_\infty + t_\infty^2). \end{aligned} \quad (5.29)$$

W równaniu (5.29) współczynniki  $C$  obliczono w sposób następujący:

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{S^{(1)} k^{(1)}}{L^{(1)}}, \\ C^{(2)} &= \frac{S^{(2)} k^{(2)}}{L^{(2)}}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

W związku z powyższym można rozważyć dwa warianty: minimalizacja bezpośrednia funkcji (5.29) przez dobór odpowiednich węzłowych wartości temperatury lub wykorzystanie warunku ekstremum funkcji. Ostatnia metoda wymaga różniczkowania wzoru (5.29) względem węzłowych zmiennych i przyrównania pochodnych do zera. W wyniku tej operacji otrzymamy tyle równań, ile jest niewiadomych. Założono, że  $S^{(1)} = S^{(2)} = S$ . Rozważono układ równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t_1} &= C^{(1)} t_1 - C^{(1)} t_2 + qS = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial t_2} &= -C^{(1)} t_1 + (C^{(1)} + C^{(2)}) t_2 - C^{(2)} t_3 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial t_3} &= -C^{(2)} t_2 + (C^{(2)} + \alpha S) t_3 - \alpha S t_\infty = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.31)$$

Układ równań (5.31) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qS \\ 0 \\ -\alpha S t_\infty \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.32)$$

lub:

$$[H]\{t\} + \{P\} = 0, \quad (5.33)$$

gdzie:

$[H]$  – macierz współczynników układu równań (5.31);

$\{P\}$  – wektor prawej części układu równań (5.31).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że otrzymana macierz współczynników układu równań jest symetryczna i pasmowa. Rozpatrzono rozwiązanie tego samego problemu w oparciu o otrzymane ogólne rozwiązanie (5.13). Dla rozpatrywanego przypadku wzory (5.14) oraz (5.15) można zapisać następująco (dla dowolnego elementu skończonego):

$$[H] = \int_V k \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T dV + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS, \quad (5.34)$$

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_\infty dS + \int_S q \{N\} dS. \quad (5.35)$$

Wektory, wchodzące do równań (5.34) i (5.35) można zapisać następująco:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{x_j - x}{L} \\ \frac{x - x_i}{L} \end{Bmatrix},$$

$$\{N\}^T = \{N_i \quad N_j\} = \left\{ \frac{x_j - x}{L}; \quad \frac{x - x_i}{L} \right\},$$

$$\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix},$$

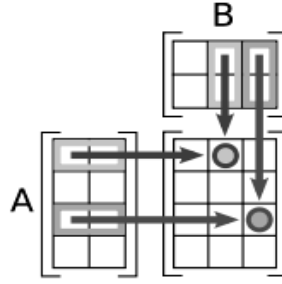
$$\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\}.$$

Wtedy można otrzymać macierz  $[H]$  w następujący sposób:

$$[H] = \int_V k \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} dV + \int_S \alpha \begin{Bmatrix} \frac{x_j - x}{L} \\ \frac{x - x_i}{L} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{x_j - x}{L}; \quad \frac{x - x_i}{L} \right\} dS$$

i po całkowaniu mamy:

$$[H] = k \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} SL + \alpha \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} \{N_i \quad N_j\} S.$$



**Rys. 5.4.** Schemat mnożenia macierzy

Zgodnie z regułami pomnożenia macierzy  $A$  przez macierz  $B$  otrzymano macierz  $C$ , której elementy można otrzymać korzystając ze schematu, pokazanego na rys. 5.4. Wykorzystując zasady mnożenia macierzy i własności funkcji kształtu uzyskano macierz dla elementu skończonego numer 1 przedstawionego na rys. 5.2:

$$[H]^{(1)} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{L^{(1)2}} & -\frac{1}{L^{(1)2}} \\ -\frac{1}{L^{(1)2}} & \frac{1}{L^{(1)2}} \end{bmatrix} SL^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} \\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & \frac{Sk}{L^{(1)}} \end{bmatrix},$$

oraz dla elementu skończonego numer 2 przedstawionego na rys. 5.2:

$$[H]^{(2)} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{L^{(2)2}} & -\frac{1}{L^{(2)2}} \\ -\frac{1}{L^{(2)2}} & \frac{1}{L^{(2)2}} \end{bmatrix} SL^{(2)} + \alpha \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j N_j \end{bmatrix} S,$$

albo:

$$[H]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}} + \alpha S \end{bmatrix}.$$

Natomiast wektor obciążeń (strumieni cieplnych) wyrażony wzorem (5.35) można przekształcić do postaci:

$$\{P\} = -\int_S \alpha \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} t_\infty dS + \int_S q \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} dS.$$

Dla elementu skończonego 1 wektor  $\{P\}$  jest równy:

$$\{P\}^{(1)} = q \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} S = q \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} S = \begin{Bmatrix} qS \\ 0 \end{Bmatrix},$$

natomiast dla elementu skończonego 2:

$$\{P\}^{(2)} = -\alpha t_\infty S \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = -\alpha t_\infty S \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\alpha t_\infty S \end{Bmatrix}.$$

W celu otrzymania układu równań dla całego obszaru należy dodawać do elementów macierzy globalnej  $[H]$  odpowiednie elementy macierzy lokalnej każdego elementu skończonego:

$$[H] = \sum_{e=1}^{n_e} [H]^{(e)}.$$

Przystępując do budowy macierzy sztywności dla całego obszaru należy w pierwszej kolejności zmienić indeksy elementów macierzy zgodnie z danymi o numeracji stopni swobody całego obszaru. Na przykład, dla elementu numer 2 (rys. 5.2) informacja taka jest zakodowana w macierzy połączeń:

	1	2
1	2, 2	2, 3
2	3, 2	4, 4

Suma macierzy elementów z uwzględnieniem miejsca elementów lokalnych macierzy w globalnej macierzy  $[H]$  jest równa:

$$\begin{aligned}
 [H] &= \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} & 0 \\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & \frac{Sk}{L^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ 0 & -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}} + \alpha S \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} & 0 \\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & Sk \left( \frac{1}{L^{(1)}} + \frac{1}{L^{(2)}} \right) & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ 0 & -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}} + \alpha S \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Natomiast dla wektora obciążeń otrzymano:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} qS \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_\infty S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qS \\ 0 \\ -\alpha_\infty S \end{Bmatrix}.$$

Jak można zauważyć otrzymano ten sam wynik, który jest pokazany w równaniach (5.30)-(5.32).

### 5.3. ZADANIA RACHUNKOWE

**Zadanie 5.1.** Obliczyć wartość temperatury w węzłach siatki elementów skończonych dla problemu ustalonego przepływu ciepła w pręcie (rys. 5.2).

Przyjęto następujące dane wyjściowe:

$$k=50 \text{ W/mK}, \alpha=10 \text{ W/m}^2\text{K}, S=2 \text{ m}^2,$$

$$L=5 \text{ m}, L^{(1)}=2.5 \text{ m}, L^{(2)}=2.5 \text{ m}, q=-150 \text{ W/m}^2, t_\infty=400 \text{ K}$$

Rozwiązanie.

Obliczenie współczynników układu równań (5.32):



$$C^{(1)} = \frac{Sk}{L^{(1)}} = \frac{2m^2 \cdot 50 \frac{W}{mK}}{2,5m} = 40 \frac{W}{K} = C^{(2)};$$

$$\alpha S = 10 \frac{W}{m^2 K} \cdot 2m^2 = 20 \frac{W}{K};$$

$$qS = -150 \frac{W}{m^2} \cdot 2m^2 = -300 W;$$

$$\alpha S t_{\infty} = 10 \frac{W}{m^2 K} \cdot 2 m^2 \cdot 40 K = 8000 W.$$

Stąd, otrzymuje się następujący układ równań:

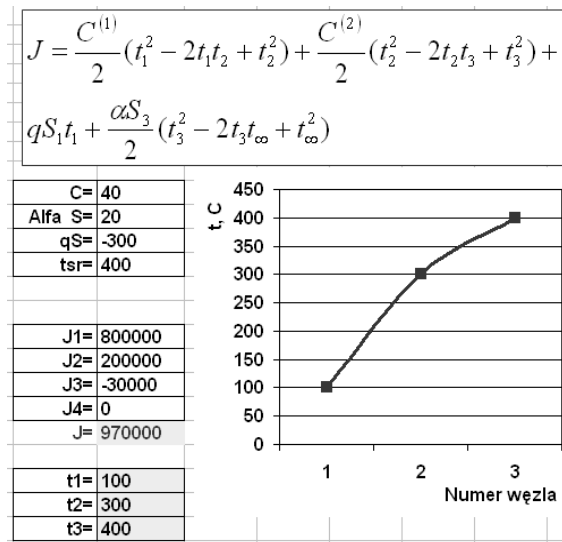
$$\begin{bmatrix} 40 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & -40 \\ 0 & -40 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -300 \\ 0 \\ -8000 \end{bmatrix} = 0$$

Po jego rozwiązaniu względem  $t$  uzyskano  $\{t\} = \{430, 422.5, 415\}$ .

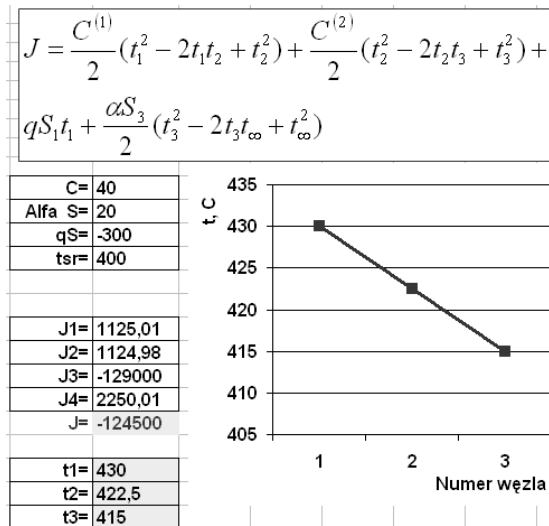
**Zadanie 5.2.** Obliczyć wartość temperatury w węzłach siatki elementów skończonych z zadania 5.1 za pomocą bezpośredniej minimalizacji funkcjonału (5.29).

Rozwiązanie.

Zadanie można rozwiązać za pomocą programu EXCEL. Niezbędnym jest również instalacja narzędzia SOLVER. Dane początkowe i wyniki bezpośredniej minimalizacji funkcjonału (5.29) są pokazane na rys. 5.4-5.5.



Rys. 5.4. Arkusz EXCEL z zadaniem początkowym rozkładem temperatury.



Rys. 5.5. Arkusz EXCEL po wykonaniu minimalizacji funkcjonału.